GBC083 - Segurança da Informação
Aula 2 - Sigilo Perfeito

Encriptação segura

- Meta: "Independentemente de qualquer informação prévia que o atacante tem sobre o texto em claro, o texto cifrado não pode vazar nenhuma informação adicional sobre o texto em claro
- Cenário: ataque usando somente um texto cifrado

Revisão sobre probabilidades

- Variável aleatória – variável que assume valores discretos de acordo com probabilidades
- Distribuição de probabilidades para uma variável aleatória – especifica as probabilidades com qual a variável assume cada possível valor
  - Cada probabilidade deve ser entre 0 e 1
  - As probabilidades somam 1

Revisão sobre probabilidades

- Evento - uma ocorrência específica em algum experimento
  - $P(E)$ - probabilidade do evento E
- Probabilidade condicional - probabilidade com que um evento ocorre, assumindo que algum outro ocorreu
  - $P(A|B) = P(A \text{ e } B)/P(B)$
- Duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se para todo x, y, temos $P(X = x|Y = y) = P(X = x)$

Revisão sobre probabilidades

- Lei da probabilidade total - digamos $E_1, \ldots, E_n$ são uma partição de todas as possibilidades.
- Então para qualquer A:
  - $P(A) = \sum_i P(A \text{ e } E_i) = \sum_i P(A|E_i) \cdot P(E_i)$

Criptografia de chave privada

- Espaço de mensagens **M** e algoritmos (Gen, Enc, Dec):
  - Gen (algoritmo de geração de chaves): gera k
  - Enc (algoritmo de encriptação): recebe chave k e mensagem $m \in \mathbf{M}$ como entrada; produz texto cifrado c

$$c \leftarrow Enc_k(m_0)$$

  - Dec (algoritmo de descriptação): recebe chave k e texto cifrado c como entrada; produz

$$m \leftarrow Dec_k(c)$$

Notação

- **K** espaço das chaves – conjunto de todas as possíveis chaves
- **C** espaço de texto cifrado – conjunto de todos os textos cifrados

Distribuições de probabilidades

- Seja M uma variável aleatória denotando o valor da mensagem
  - M varia de acordo com **M**
  - Isto reflete a chance de diferentes mensagens sendo enviadas pelas partes, considerando o conhecimento prévio do atacante
  - Exemplo
    - $P(M = \text{ atacar hoje }) = 0.7$
    - $P(M = \text{ não atacar }) = 0.3$

Distribuições de probabilidades

- Seja K uma variável aleatória denotando a chave
  - K varia no espaço de chaves $\mathbf{K}$
- Escolher algum esquema de encriptação (Gen, Enc, Enc)
  - Gen define uma distribuição de probabilidade para K:
    - $P(K = k) = P(Gen \text{ produz chave } k)$

Distribuições de probabilidades

- Variáveis aleatórias M e K são independentes
  - a mensagem que a parte envia não depende da chave usado para encriptar aquela mensagem

Distribuições de probabilidades

- Escolher um esquema de encriptação (Gen, Enc, Dec) e alguma distribuição para M
- Considere o seguinte experimento aleatório:
  - Escolha uma mensagem m a partir de M
  - Gerar uma chave k usando Gen
  - Computar $c \leftarrow Enc_k(m)$
- Isto define uma distribuição no texto cifrado
- Seja C uma variável aleatória denotando o texto cifrado neste experimento aleatório

Exemplo 1

- Considere a cifra de deslocamento
  - Então para toda $k \in \{0, \ldots, 25\}$, $P(K = k) = 1/26$
- Supondo $P(M = a) = 0.7$, $P(M = z) = 0.3$
- Quanto é $P(C = b)$?
  - Ou $M =$‘a’ e $K = 1$, ou $M =$‘z’ e $K = 2$
  - $P(C = b) = P(M = a) \cdot P(K = 1) + P(M = z) \cdot P(K = 2)$
  - $= 0.7 \cdot 1/26 + 0.3 \cdot 1/26 = 1/26$

Exemplo 2

- Considere a cifra de deslocamento e a distribuição $P(M = sim) = 0.5$, $P(M = \text{não}) = 0.5$
- $P(C = xnr) =?$
- $= P(C = xnr|M = sim) \cdot P(M = sim) + P(C = xnr|M = \text{não}) \cdot P(m = \text{não})$
- $1/26 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.5 = 1/52$

Sigilo perfeito (informal)

- "Independentemente de qualquer conhecimento prévio que o atacante tem sobre o texto em claro, o texto cifrado não deve vazar nenhuma informação sobre o texto em claro"
  - Cenário: ataque usando somente um texto cifrado

Sigilo perfeito (informal)

- Informação do atacante sobre o texto em claro = distribuição do texto em claro conhecida pelo atacante
  - Sigilo perfeito significa que observando o texto cifrado não deve mudar o conhecimento do atacante sobre a distribuição do texto em claro

Sigilo perfeito (formal)

- Esquema de encriptação (Gen, Enc, Dec) com espaço de mensagens **M** e espaço de texto cifrado **C** é perfeitamente secreto se para toda distribuição sobre **M**, todo $m \in \mathbf{M}$ e todo $c \in \mathbf{C}$ com $P(C = c) > 0$ vale que

$$P(M = m | C = c) = P(M = m)$$

Exemplo 3

- Considere uma cifra de deslocamento e a distribuição $P(M = sim) = 0.5$, $P(M = nao) = 0.5$
- Faça $m = nao$ e $c = xnr$
- $P(M = nao|C = xnr) = 0 \neq P(M = nao)$

Teorema de Bayes

- $P(A|B) = P(B|A) \cdot P(A)/P(B)$
- Por que isso é verdade?
- Como usar?

Exemplo 4

- Cifra de deslocamento
  - $P(M = hi) = 0.3$
  - $P(M = no) = 0.2$
  - $P(M = in) = 0.5$
- $P(M = hi) = P(M = hi|C = xy)$?
- $P(M = hi|C = xy) =$?

Exemplo 4

- Cifra de deslocamento
  - $P(M = hi) = 0.3$
  - $P(M = no) = 0.2$
  - $P(M = in) = 0.5$
- $P(M = hi) = P(M = hi|C = xy)$?
- $P(M = hi|C = xy) =$? Usar teorema de Bayes

Exemplo 4

- Cifra de deslocamento
  - $P(M = hi) = 0.3$
  - $P(M = no) = 0.2$
  - $P(M = in) = 0.5$
- $P(M = hi) = P(M = hi|C = xy)$?
- $P(M = hi|C = xy) =$? Usar teorema de Bayes
- $= P(C = xy|M = hi) \cdot P(M = hi)/P(C = xy)$
- Resolver cada parte

Exemplo 4 continuado

- $P(C = xy|M = hi) = 1/26$

Exemplo 4 continuado

- $P(C = xy|M = hi) = 1/26$ porque só tem uma chave que pode transformar hi em xy

Exemplo 4 continuado

- $P(C = xy|M = hi) = 1/26$ porque só tem uma chave que pode transformar hi em xy
- $P(C = xy) =$? usar lei da probabilidade total

Exemplo 4 continuado

- $P(C = xy|M = hi) = 1/26$ porque só tem uma chave que pode transformar hi em xy
- $P(C = xy) =$? usar lei da probabilidade total
- $P(C = xy) = P(C = xy|M = hi) \cdot 0.3 + P(C = xy|M = no) \cdot 0.2 + P(C = xy|M = in) \cdot 0.5$
- $= 1/26 \cdot 0.3 + 1/26 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.5 = 1/52$

Exemplo 4 continuado

- $P(M = hi|C = xy) =?$
- $P(C = xy|M = hi) \cdot P(M = hi)/P(C = xy)$
- $1/26 \cdot 0.3/(1/52) = 0.6 \neq P(M = hi)$
- Portanto a cifra de deslocamento não é perfeitamente secreta!
- Como construir um esquema perfeitamente secreto?

One-Time Pad – Cifra de uso único

- Esquema de encriptação (Gen, Enc, Dec) com espaço de mensagens **M** e espaço de texto cifrado **C** é perfeitamente secreto se para toda distribuição de probabilidade sobre **M**, todo $m \in \mathbf{M}$ e todo $c \in \mathbf{C}$ com $P(C = c) > 0$, vale
- $$P(M = m | C = c) = P(M = m)$$

One-Time Pad

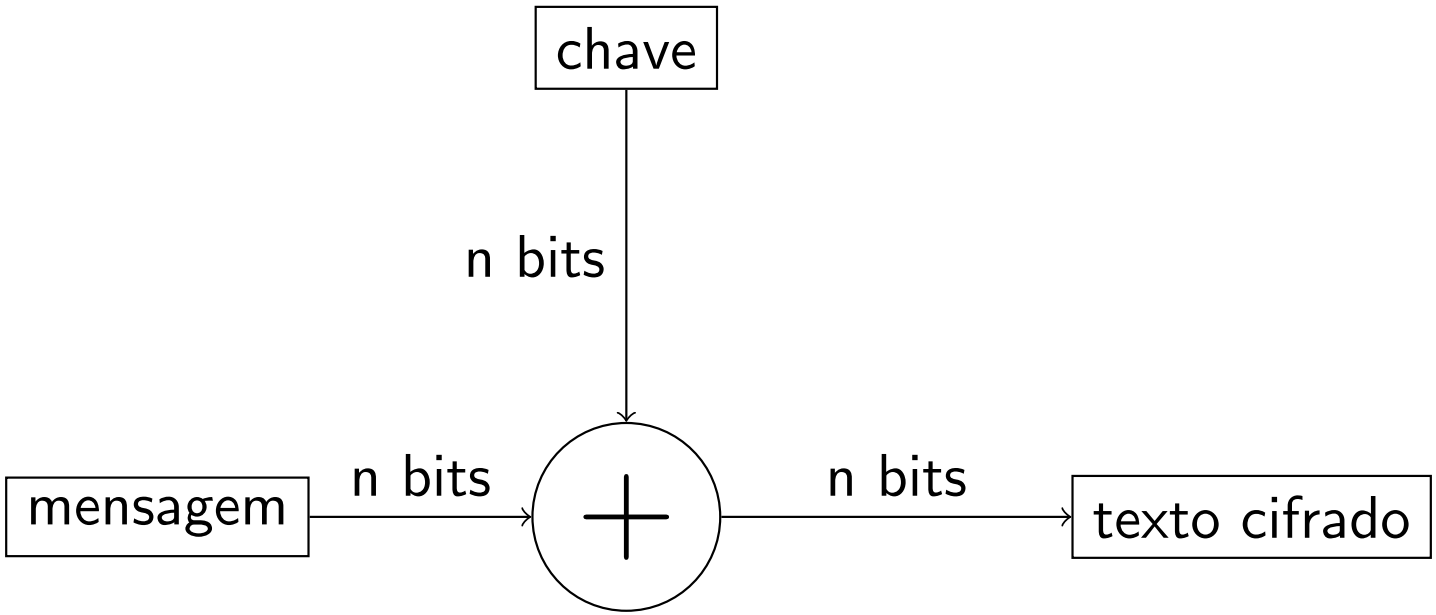
- Patenteado em 1917 por Vernam
  - Pesquisas históricas indicam que foi inventado pelo menos 35 anos antes que isso
- Provado como perfeitamente secreto por Shannon em 1949

One-Time Pad

- Seja $\mathbf{M} = \{0,1\}^n$
- Gen: escolher chave uniforme $k \in \{0,1\}^n$
- $Enc_k(m) = k \oplus m$, sendo $\oplus$ a operação xor bit-a-bit
- $Dec_k(c) = k \oplus c$
- Corretude: $Dec_k(Enc_k(m)) = k \oplus (k \oplus m) = (k \oplus k) \oplus m = m$

```
#include <stdio.h>
int main() {
   int a = 25 ^10;
   printf("a -= %d\n", a);
   printf("a^10 -= %d\n", a^10);
   printf("a^25 -= %d\n", a^25);
}
```

One-Time Pad



Implementação da cifra OTP

- Seja $\mathbf{M} = \{0,1\}^n$
- *Gen*: escolher chave uniforme $k \in \{0,1\}^n$
- $Enc_k(m) = k \oplus m$, XOR bit-a-bit
- $Dec_k(c) = k \oplus c$

Representação dos dados

- Texto limpo – em ASCII
- Chave – em hexa escrito em ASCII
- Texto cifrado – em hexa escrito em ASCII

Sigilo perfeito do One-Time Pad

- Determinar distribuição arbitrária sobre $\mathbf{M} = \{0,1\}^n$ e um m arbitrário, $c \in \{0,1\}^n$
- $P(M = m | C = c) = ?$
  - $= P(C = c | M = c) \cdot P(M = m) / P(C = c)$
- $P(C = c)$
  - $\sum_{m'} P(C = c | M = m') \cdot P(M = m')$

Sigilo perfeito do One-Time Pad

- Determinar distribuição arbitrária sobre $\mathbf{M} = \{0,1\}^n$ e um m arbitrário, $c \in \{0,1\}^n$
- $P(M = m | C = c) = ?$
  - $= P(C = c | M = c) \cdot P(M = m) / P(C = c)$
- $P(C = c)$
  - $\sum_{m'} P(C = c | M = m') \cdot P(M = m')$
  - $\sum_{m'} P(k = m' \oplus c) \cdot P(M = m')$

Sigilo perfeito do One-Time Pad

- Determinar distribuição arbitrária sobre $\mathbf{M} = \{0,1\}^n$ e um m arbitrário, $c \in \{0,1\}^n$
- $P(M = m | C = c) = ?$
  - $= P(C = c | M = c) \cdot P(M = m) / P(C = c)$
- $P(C = c)$
  - $\sum_{m'} P(C = c | M = m') \cdot P(M = m')$
  - $\sum_{m'} P(k = m' \oplus c) \cdot P(M = m')$
  - $\sum_{m'} 2^{-n} \cdot P(M = m')$

Sigilo perfeito do One-Time Pad

- Determinar distribuição arbitrária sobre $\mathbf{M} = \{0,1\}^n$ e um m arbitrário, $c \in \{0,1\}^n$
- $P(M = m|C = c) =?$
  - $= P(C = c|M = c) \cdot P(M = m)/P(C = c)$
- $P(C = c)$
  - $\sum_{m'} P(C = c|M = m') \cdot P(M = m')$
  - $\sum_{m'} P(k = m' \oplus c) \cdot P(M = m')$
  - $\sum_{m'} 2^{-n} \cdot P(M = m')$
  - $= 2^{-n}$

Sigilo perfeito do One-Time Pad

- Determinar distribuição arbitrária sobre $\mathbf{M} = \{0,1\}^n$ e um m arbitrário, $c \in \{0,1\}^n$
- $P(M = m|C = c) =?$
  - $= P(C = c|M = m) \cdot P(M = m)/P(C = c)$
  - $= P(k = m \oplus c) \cdot P(M = m)/2^{-n}$
  - $= 2^{-n} \cdot P(M = m)/2^{-n}$
  - $= P(M = m)$

Encriptação One-Time Pad (OTP)

- Temos
  - Texto em claro= sequência de caracteres ASCII
  - Chave = sequência de dígitos em hexa, escritos em ASCII
- Encriptação
  - Ler os dois, aplicar XOR entre eles e obter o texto cifrado

Decriptação OTP

- Reverter encriptação
- Ler texto cifrado e chave; aplicar XOR para obter mensagem original

Otimalidade de tamanho mínimo de chave do OTP

- Teorema: se (Gen, Enc, Dec) com mensagem **M** é perfeitamente secreto então $|\mathbf{K}| \geq |\mathbf{M}|$
- Intuição:
  - Dado texto cifrado, tentar decriptar com cada chave em **K**
  - Lista de até $|\mathbf{K}|$ possíveis mensagens
  - Se $|\mathbf{K}| < |\mathbf{M}|$ alguma mensagem não está na lista
    - Vazamento de informação sobre o que é mensagem legítima ou não

Prova: Otimalidade de OTP

- Teorema
  - se (Gen, Enc, Dec) no espaço **M** é perfeitamente secreto então $|\mathbf{K}| \geq |\mathbf{M}|$
- Prova
  - Assumir $|\mathbf{K}| < |\mathbf{M}|$
  - Mostrar que existe distribuição em **M**, mensagem m e texto cifrado c tal que
    - $P(M = m|C = c) \neq P(M = m)$

Continuação da Prova: Otimalidade de OTP

- Continuação da Prova:
  - Usar distribuição uniforme em $\mathbf{M}$
  - Usar qualquer texto cifrado c
  - Considerar o conjunto $M(c) = \{Dec_k(c)\}_{k \in \mathbf{K}}$
    - Essas são as únicas mensagens possíveis que gerariam o texto cifrado c
  - $|M(c)| \leq |\mathbf{K}| < |\mathbf{M}|$ então existe algum m que não está em $M(c)$
    - $P(M = m|C = c) = 0 \neq P(M = m)$
    - Então não é uniforme.

Limitações One-Time Pad

- Limitações
  - Chave do tamanho da mensagem
  - Somente segura se chave for usada só uma vez
- Limitações inerentes a qualquer método seguro como o One-Time Pad

Ataque ao OTP com reuso de chave

- Explorando tabela ASCII
  - Letras começam com 01
  - Caractere espaço inicia com 00
  - XOR de duas letras resultam em 00
  - XOR de letra e espaço resulta 01
    - Embora espaço XOR espaço também
    - Pontuação pode complicar
  - É fácil identificar XOR de entre letra e espaço

Exemplo - OTP com mesma chave

Cifra 1: $10\ldots\ldots|01\ldots\ldots|01\ldots\ldots|11\ldots\ldots$

Cifra 2: $10\ldots\ldots|01\ldots\ldots|01\ldots\ldots|10\ldots\ldots$

$1 \oplus 2$: $00\ldots\ldots|00\ldots\ldots|00\ldots\ldots|01010000$

Como o caractere espaço é em hexa $0x20$ e em binário $0010\,0000$, a letra é ...

Exemplo - OTP com mesma chave

Cifra 1: $10\ldots\ldots|01\ldots\ldots|01\ldots\ldots|11\ldots\ldots$

Cifra 2: $10\ldots\ldots|01\ldots\ldots|01\ldots\ldots|10\ldots\ldots$

$1 \oplus 2$: $00\ldots\ldots|00\ldots\ldots|00\ldots\ldots|01010000$

Como o caractere espaço é em hexa $0x20$ e em binário $0010\,0000$, a letra é . . . p.

Conclusões sobre OTP

- Definiu-se o que é perfeitamente secreto
- OTP é perfeitamente secreto
- OTP usa a menor chave possível para ser perfeitamente secreto

Próximos passos

- Relaxar definição de segurança
- Utilizar chave menor