Transformações Geométricas 2D

GBC204 – Computação Gráfica
Prof. Dr. rer. nat. Daniel Duarte Abdala

Objetivos das Transformações

- Possibilitar a modificação da forma e posição de objetos;
- De fato, transformações afins estão entre as ferramentas matemáticas mais fundamentais em computação gráfica;
- Um uso claro de transformações geométricas é simplificar o processo de modelagem geométrica:
  - Muitos modelos tridimensionais são altamente simétricos. A simetria pode ser explorada com o auxílio de transformações para simplificar o processo de modelagem. Modela-se uma parte e se produz a contra-parte simétrica simplesmente por transformações geométricas;

Objetivos das Transformações

- Um segundo uso de transformações é encontrado em animações. Pense em uma animação simples em que um carro se movimenta por uma pista circular. O modelo (carro e pista) em si não muda. Apenas a posição do carro ao longo do tempo. Tal pode ser realizado pela simples translação do carro;
- Um terceiro, não óbvio, uso de transformações geométricas refere-se a renderização. Após um modelo 3D ter sido criado se faz necessário que tal seja transposto para uma superfície 2D. Para tal são utilizadas transformações de perspectiva.

Viewport – Uma janela em uma tela, um quadro de um vídeo ou uma versão em papel impresso.

Transformações em 2D

- O plano-xy (plano do modelo), denotado por $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ refere-se ao plano cartesiano usual consistindo de pontos (x, y):
- $x = \langle x_1, x_2\rangle$ onde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, é um ponto no plano-xy
- $\mathbf{0}$ é o ponto de origem $\mathbf{0} = \langle 0,0\rangle$
- $\mathbf{x+y} = \langle x_1+y_1, x_2+y_2\rangle$
- $\mathbf{x-y} = \langle x_1-y_1, x_2-y_2\rangle$
- $\alpha\mathbf{x} = \langle \alpha x_1, \alpha x_1\rangle$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- **DEF**: Uma transformação em $\mathbb{R}^2$ é um mapeamento $A: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ no qual cada ponto $x \in \mathbb{R}^2$ é mapeado para um único ponto A(x), também em $\mathbb{R}^2$.

Transformações Lineares

- **DEF**: Seja **A** uma transformação. **A** é uma transformação linear se as duas condições a seguir forem atendidas:
  1. $\forall\alpha \in \mathbb{R} \wedge \forall x \in \mathbb{R}^2, A(\alpha x) = \alpha A(x)$
  2. $\forall x,y \in \mathbb{R}^2 = A(x) + A(y)$
- Exemplos:
  1. $A_1 : \langle x, y\rangle \mapsto \langle -y, x\rangle$
  2. $A_2 : \langle x, y\rangle \mapsto \langle x, 2y\rangle$
  3. $A_3 : \langle x, y\rangle \mapsto \langle x+y, y\rangle$
  4. $A_4 : \langle x, y\rangle \mapsto \langle x, -y\rangle$
  5. $A_5 : \langle x, y\rangle \mapsto \langle -x, -y\rangle$

Representação Matricial de Transformações Lineares

- A composição de diversas transformações é comum em aplicações de CG;
- A computação de tais transformações pode ser problemática e ineficiente;
- Felizmente, é possível expressar tais transformações via Álgebra linear, tornando sua computação muito mais eficiente (e.g. Usando suporte a múltiplicação matricial em hardware - GPUs):
- Os eixos canônicos x, e y podem ser expressados pelos vetores:

  $i = \langle 1, 0\rangle$ eixo-x
  $j = \langle 0, 1\rangle$ eixo-y

Representação Matricial de Transformações Lineares

- Qualquer vetor **x** = $\langle x_1,\ x_2\rangle$ pode ser expresso de maneira única como uma combinação linear de **i** e **j**;

  $$\mathbf{x} = \langle x_1\mathbf{i},\ x_2\mathbf{j}\rangle$$

- Seja A uma transformação linear. Seja **u** = $\langle u_1,\ u_2\rangle$ = A(i) e **v** = $\langle v_1,\ v_2\rangle$ = A(j). Então, por linearidade, $\forall x \in \mathbb{R}^2$,

  $$\begin{aligned} A(x) &= A(x_1 i, x_2 j) = x_1 A(i), x_2 A(j) \\ &= x_1 u + x_2 v \\ &= \langle u_1 x_1 + u_1 x_2,\ u_2 x_1 + u_2 x_2 \rangle \end{aligned}$$

Representação Matricial de Transformações Lineares

- Seja M a matriz $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$. Então,

$$M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1x_1 + v_1x_2 \\ u_2x_1 + v_2x_2 \end{pmatrix}$$

- Sendo assim, M é equivalente a A.

Transformação Inversa

- Considere a matriz de transformação M a seguir:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- O inverso de M, ou seja M^{-1} pode ser computado como:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det(M) = ad - bc$$

Ex: $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

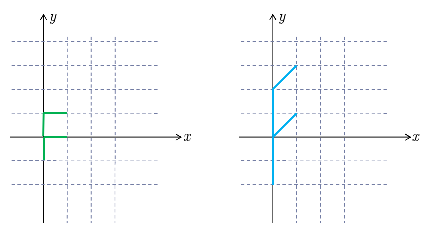
Exemplo:

- Considere a lista de pontos a seguir:
  - F = { $\langle 0, 0\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$, $\langle 0, -1\rangle$, $\langle 1, 1\rangle$, $\langle 1, 0\rangle$ }
  - Representando a letra "F";
- Aplicando a transformação linear $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ obtêm-se:

$$M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

- Finalmente, os pontos transformados são:
  - F = { $\langle 0, 0\rangle$, $\langle 0, 2\rangle$, $\langle 0, -2\rangle$, $\langle 1, 3\rangle$, $\langle 1, 1\rangle$ }

Graficamente...



Transformações Rígidas

- DEF: Transformações rígidas ou de corpo rígido. Não deformam os objetos. Ângulos e paralelismo são preservados:
  - distâncias entre pontos;
  - Ângulos entre linhas.
- Três tipos:
  - Translação;
  - Rotação;
  - Espelhamento.

Translação

- **DEF**: A transformação T_u é dita uma translação provido que exista um vetor u ∈ $\mathbb{R}^2$ de modo que:

  $$T_u(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u} \equiv \langle x_1+u_1,\ x_2+u_2 \rangle$$

- A **composição** de duas translações T_u e T_v, denotada por $T_u \circ T_v$ é equivalente a:

  $$\begin{aligned} T_u \circ T_v &= T_u\,(T_v(x)) \\ &= T_u\,(x+v) \\ &= x + v + u \end{aligned}$$

- A transformação **identidade**, denotada por I pode ser definida por uma translação que não modifica a coordenada original:

  $$I = T_{\mathbf{0}}(x) = x + \mathbf{0}\,,\ \mathbf{0} = \langle 0,\ 0 \rangle$$

Translação

- A transformação **inversa**, denotada por A^{-1} é aquela que composta com a transformação original, produz a transformação identidade

  $$A^{-1} \circ A = I,\quad I = A(x) = x$$

- A translação é um caso particular de uma classe mais genérica de transformações geométricas chamadas de **transformações lineares**;

Translação (Linear)

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$

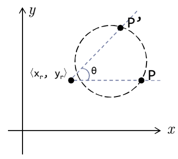
$$P' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

$$P' = P + T$$

- Em 2D uma translação traduz-se simplesmente no reposicionalmento, ou deslocamento de objetos nos eixos x e y.

Rotação

- Pode se dar a partir da origem;
- Pode se dar a partir de um ponto qualquer;
- θ – ângulo de rotação
- $\langle x_r,\ y_r \rangle$ – ponto de rotação ou ponto pivotal

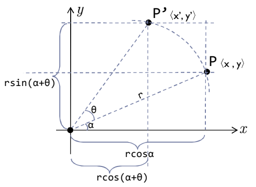


$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad P' = R \cdot P$$

Ângulos positivos são no sentido inverso do relógio!

Rotação



Pelas fórmulas de adição de seno e coseno

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\theta) = r(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = r\sin(\alpha+\theta) = r(\sin\alpha\cos\theta + \sin\alpha\cos\theta) = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Exemplo

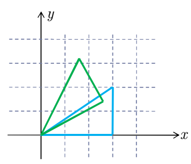
- Rotacionar o triângulo Δ= { $\langle 0,\ 0 \rangle$, $\langle 3,\ 0 \rangle$, $\langle 3,\ 2 \rangle$ } em π/6 radianos (30º).

$$R = \begin{pmatrix} \cos{}^{\pi}\!/_{6} & -\sin{}^{\pi}\!/_{6} \\ \sin{}^{\pi}\!/_{6} & \cos{}^{\pi}\!/_{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -{}^{1}\!/_{2} \\ {}^{1}\!/_{2} & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -{}^{1}\!/_{2} \\ {}^{1}\!/_{2} & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -{}^{1}\!/_{2} \\ {}^{1}\!/_{2} & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -{}^{1}\!/_{2} \\ {}^{1}\!/_{2} & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 3.2 \end{pmatrix}$$



Composição de Rotações

- Similar a composição de translações;

$R_\beta \circ R_\alpha = R_\beta(R_\alpha)$

$$M_\beta M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha & -\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha & -\sin\beta\sin\alpha + \cos\beta\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Composição de Rotações

- Relembrando um pouco de trigonometria...

Trig – Fórmulas de Adição

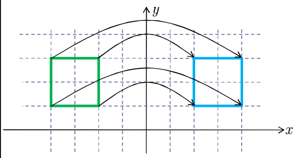
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta$$

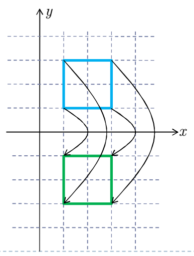
$$\begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha & -\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha & -\sin\beta\sin\alpha + \cos\beta\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

- Conclusão: Rotações sucessivas, ou composição de rotações se resumem a rotação da soma dos ângulos!

Reflexão

- Em 2D, reflexões são computadas em relação a uma linha de referência:
  - Três opções: em relação ao eixo-x, eixo-y ou eixo arbitrário.
- A(**x**) = ⟨x, y⟩ ↦ ⟨-x, y⟩
- A(**x**) = ⟨x, y⟩ ↦ ⟨x, -y⟩





Reflexão

- Reflexão em relação ao eixo x:

A(**x**) = ⟨x, y⟩ ↦ ⟨-x, y⟩

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Reflexão em relação ao eixo y:

A(**x**) = ⟨x, y⟩ ↦ ⟨x, -y⟩

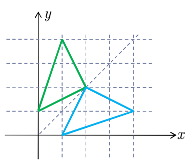
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Reflexão em relação a uma linha arbitrária

- Múltiplos passos:
  - Rotacionar a linha de rotação para coincidir com os eixos x ou y;
  - Aplicar a reflexão canônica em relação ao eixo escolhido;
  - Rotacionar de volta (-α) para reposicionar a linha de reflexão ao seu lugar original;

S = { ⟨1, 0⟩ , ⟨4, 1⟩ , ⟨2, 2⟩ }

Ex:



$\alpha = 45^o = \pi/4$

colinha ...

α	sin	cos	tg
30^o	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45^o	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60^o	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$

Exemplo: Reflexão Arbitrária

- Passo 1: Rotacionar a linha de reflexão:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A(S) = R_{-\alpha} R_x R_\alpha S$$
$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S(i)_x \\ S(i)_y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S(i)_x \\ S(i)_y \end{pmatrix}$$

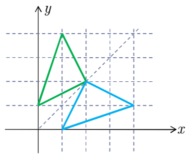
Exemplo: Reflexão Arbitrária

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} S(i)_x \\ S(i)_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} S(i)_x \\ S(i)_y \end{pmatrix}$$

$$S(1)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S(2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$S(3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$



25

Transformações Afins

- DEF: Uma transformação A é dita afim se ela puder ser expressa como uma composição de uma translação e uma transformação linear:
  - $A = T_{\mathbf{u}} \circ B$, $\exists\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$
  - $A(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x})+\mathbf{u}$
- Como u=**0** é uma possibilidade, fica claro que toda transformação linear é também afim. No entanto, nem toda transformação afim é linear. Em particular, se u≠**0** A(**x**) = B(**x**)+**u** não é linear, pois não mapeia **0** ↦ **0**.

26

Escalonamento

- Duas possibilidades: aumento ou diminuição
  - Zoon in, zoon out
- Computado em relação ao centro do objeto
- **k** – fator de escalonamento

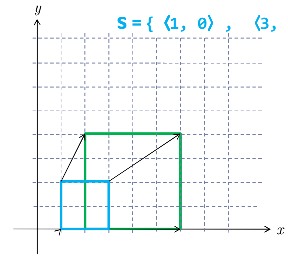
$$A(P)=M_k P$$
$$=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

- Caso k>1 – aumento (zoon in)
- Caso 0<k<1 – diminuição (zoon out)
- Também é possível escalonar em apenas um eixo, ou em porções distintas em cada eixo: $M_k=\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$

27

Escalonamento - Exemplo

S = { ⟨1, 0⟩ , ⟨3, 0⟩ , ⟨1, 2⟩ , ⟨3, 2⟩ } $k=2$



$$A(S)=M_k S$$
$$=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} S(i)x \\ S(i)y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2S(i)x \\ 2S(i)y \end{pmatrix}$$

$$S(1)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S(2)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S(3)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$S(4)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

28

Escalonamento Centrado

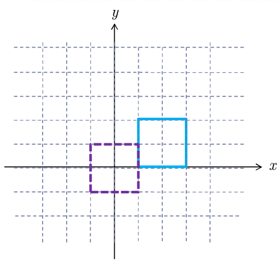
1. Encontrar o baricentro ou centro de massa do objeto;
2. Transladar o objeto para a origem **0** = ⟨x, y⟩ ;
3. Escalonar o objeto;
4. Transladar de volta para o centro de massa;

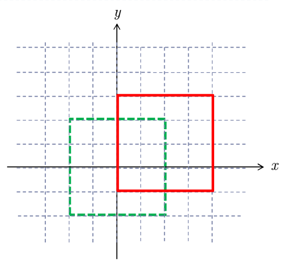
$$B(S)=\frac{\sum_{i=1}^{n} S_i}{n} \qquad \begin{cases} B(S)_x=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} S_{ix}}{n} \\ B(S)_y=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} S_{iy}}{n} \end{cases}$$

$$A(P)=P-BS+B$$

29

Escalonamento Centrado – exemplo





30

Escalonamento Centrado – exemplo

P = { ⟨1, 0⟩ , ⟨3, 0⟩ , ⟨1, 2⟩ , ⟨3, 2⟩ }

$$\begin{cases} B(S)_x = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} S_{ix}}{n} = \dfrac{(1+3+1+3)}{4} = 2 \\ B(S)_y = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} S_{iy}}{n} = \dfrac{(0+0+2+2)}{4} = 1 \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$P - B$ P' = { ⟨-1, -1⟩ , ⟨1, -1⟩ , ⟨-1, 1⟩ , ⟨1, 1⟩ }

31

Escalonamento Centrado – exemplo

$$S(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$S(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

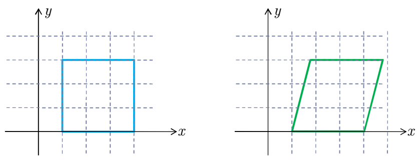
$$S(3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$S(4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

S = { ⟨0, -1⟩ , ⟨4, -1⟩ , ⟨0, 3⟩ , ⟨4, 3⟩ }

32

Achatamento (shear)



$$A(P) = M_s P$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + my \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ mx + y \end{pmatrix}$$

33

Transformações 2D em OpenGL

- OpenGL mantêm diversas matrizes que controlam como objetos do mundo são desenhados, onde a câmera/ponto de vista é posicionado e onde a imagem é apresentada na tela.
- ModelView – matriz utilizada primariamente para posicionar objetos no espaço 3D;
  - Definindo a coordenada z como 0.0 a transformação especificada se restringirá a atuar apenas no plano x,y,0;

34