

# Lista de Exercícios2

Esta lista de exercícios foi criada com o intuito de prover ao aluno uma plataforma para a revisão sistemática do conteúdo visto em aula. Estes exercícios não são de nenhuma maneira uma cobertura perfeita dos possíveis exercícios em teoria dos grafos muito menos um exemplo de questões a serem cobradas em avaliações. Aconselha-se fortemente ao aluno que completar esta lista que use subsequentemente as listas de exercícios do livro texto como fonte adicional de estudos.

---

## Emparelhamento (Matching) Conjuntos Independentes/Estáveis Cobertura e Arestas de Cobertura

1. Defina o conceito de emparelhamento.
2. Distingua os conceitos Maximal de Máximo. Utilize um exemplo para exemplificar a diferença.
3. Dados os grafos do anexo 1 apresente o emparelhamento máximo para cada um deles e compute também o número de emparelhamento.
4. O que é um emparelhamento perfeito e quais dos grafos do anexo 1 são emparelháveis?
5. Um conjunto de 9 candidatos foram pré-selecionados por uma empresa de recrutamento para ocupar 7 vagas em uma empresa de TI. As sete vagas tem a seguinte configuração: VAGA 1: (PHP, BD); VAGA 2: (C++, BD); VAGA 3: (PYTHON,C++); VAGA 4: (PHP, PYTHON,C++, BD); VAGA 5: (DISPOSITIVOS MÓVEIS, JAVA); VAGA 6: (JAVA, BD); VAGA 7: (REDES, BD). O CV dos candidatos pré-selecionados é o seguinte: C1: (REDES, C++, JAVA); C2: (REDES, JAVA); C3: (DISPOSITIVOS MÓVEIS, PHP, BD); C4: (DISPOSITIVOS MÓVEIS, C++, BD, JAVA); C5: (JAVA, C++, PYTHON, REDES); C6: (REDES, DISPOSITIVOS MÓVEIS, JAVA); C7: (PYTHON, C++, BD); C8: (BD, REDES, PHP); C9: (BD, REDES, DISPOSITIVOS MÓVEIS, JAVA). Todas as vagas podem ser preenchidas com os candidatos pré-selecionados? Quais vagas serão preenchidas por quais candidatos?
6. Defina o conceito de caminhos aumentados, e descreva como podemos utilizar o teorema de Berge para decidir se um dado emparelhamento é máximo.
7. Como podemos utilizar o teorema de Hall para decidir o problema proposto no exercício 5?
8. Defina o conceito de conjuntos independentes/estáveis e forneça um exemplo. O conceito de maximal/máximo pode ser aplicado a conjuntos estáveis? Justifique sua resposta.
9. Forneça o conjunto estável máximo (se existir) para cada um dos grafos do anexo 1 e forneça seu número estável  $\alpha(G)$ .

10. O que é cobertura de um grafo? Forneça um exemplo.
11. Forneça o conjunto de cobertura para os grafos do anexo 1. Quais são seus números de cobertura  $\beta(G)$ ?
12. O que são arestas de cobertura? O conceito de maximal/máximo se aplica? Justifique sua resposta.
13. Forneça os conjuntos de arestas de cobertura para os grafos do anexo 1.
14. Demonstre que um conjunto  $S$  é um conjunto estável do grafo  $G$  se e somente se  $V \setminus S$  é uma cobertura de  $G$  e consequentemente  $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$ .

## Cliques

15. Defina o conceito de clique. Qual a relação entre cliques e grafos completos?
16. Demonstre via exemplo não trivial que o número de clique  $\omega(G)$  é igual a  $\alpha(\bar{G})$ .
17. Cite um exemplo de um problema real que pode ser abordado via grafos e resolvido via conjuntos estáveis/cliques/coberturas.
18. Delineie um algoritmo para encontrar o clique máximo de um grafo.

## Coloração de Grafos

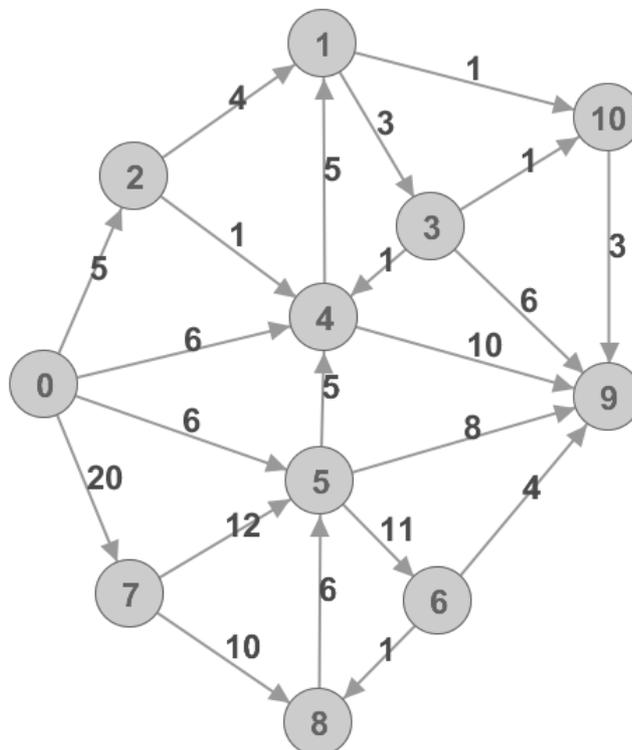
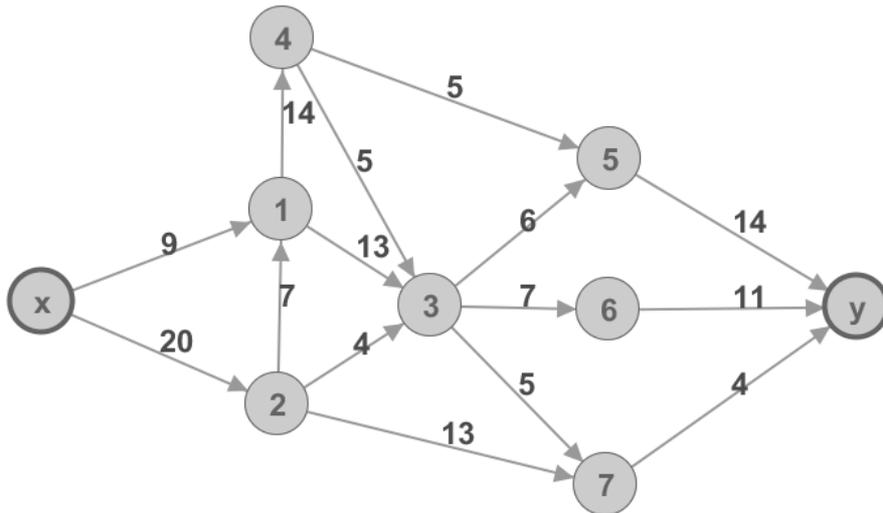
19. Defina o conceito de  $K$ -coloração. Forneça um exemplo não trivial.
20. O que é uma coloração apropriada? Defina e forneça um exemplo não trivial.
21. Qual a relação entre  $k$ -colorações apropriadas e conjuntos estáveis? Forneça um exemplo não trivial.
22. Em que situação podemos afirmar que um grafo  $G$  é  $K$ -colorável?
23. Qual a condição necessária para que um grafo seja 1-colorável?
24. Qual a condição necessária para que um grafo seja 2-colorável?
25. Defina o conceito de número cromático  $\chi(G)$ .
26. Forneça coloração apropriada para cada um dos grafos do anexo 1 e também seu número cromático.
27. Demonstre que se um dado grafo  $G$  apresenta número cromático  $\chi(G) = a$  então um subgrafo  $H$  de  $G$  possui número cromático  $\chi(H) \leq \chi(G)$ .
28. Utilize a heurística gulosa vista em aula para coloração de grafos para colorir os grafos 16-23 do anexo 1.
- 29.

## Digrafos

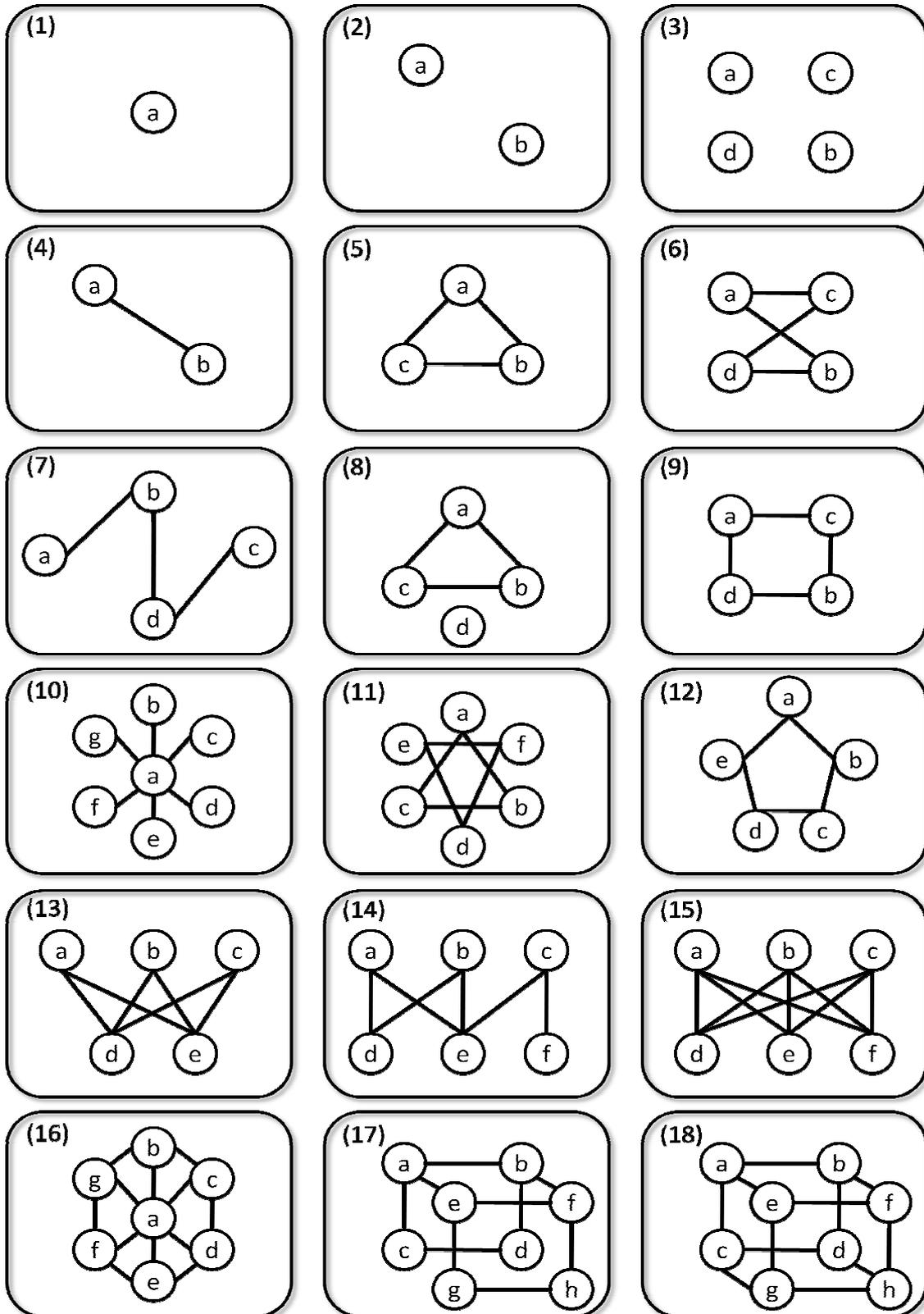
30. Forneça um exemplo de um digrafo não trivial simples (estrito) e outro de um digrafo complexo. Identifique nos digrafos apresentados a cabeça e a cauda de pelo menos um arco e forneça sua representação simbólica.
31. Defina os conceitos de grau de entrada e saída de um vértice e utilizando os grafos apresentados no exercício 30, forneça os graus de entrada  $\text{deg}_D^-$  e graus de saída  $\text{deg}_D^+$  de cada vértice.
32. O que são vizinhos de entrada e saída? Quais são os vizinhos de entrada e saída de cada vértice apresentado no grafo do exercício 30?
33. forneça o grafo fundamental de cada um dos dígrafos apresentados no exercício 30.
34. O que significa atribuir uma orientação para um grafo? Utilize os grafos do anexo 1 e forneça orientações para cada um deles.
35. Sabemos que dado um grafo completo  $K_n$  o número de orientação possíveis será  $2^{(n(n-1))/2}$ . Seria possível formular o número de orientações de um grafo qualquer? O que seria necessário? Justifique sua resposta.
36. Quais são os graus de entrada e saída máximos, mínimos e médios das orientações atribuídas aos grafos do anexo 1 no exercício 33?
37. Descreva em suas palavras o que muda em se tratando de caminhos e ciclos quando considerados no contexto de dígrafos. Forneça exemplos para detalhar as diferenças.

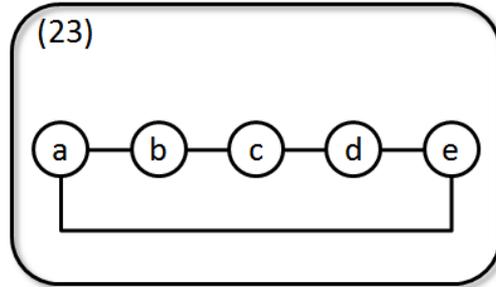
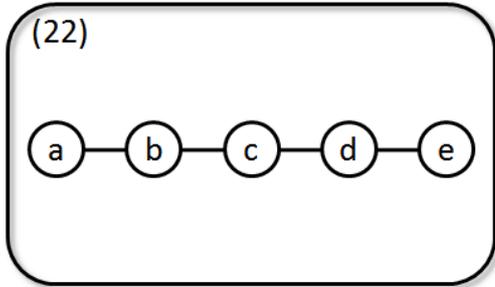
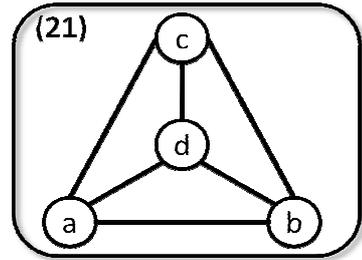
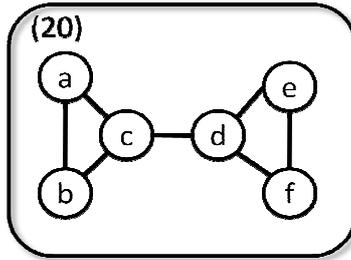
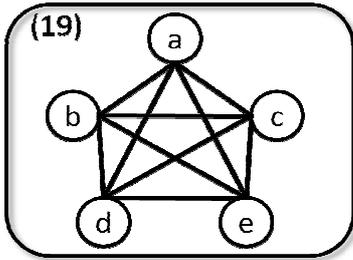
## Fluxo em Redes

38. Defina os conceitos de fonte e sumidouro no contexto de fluxo de redes. Seria possível possuir mais de um sumidouro e uma fonte?
39. O que é capacidade e fluxo no contexto de fluxo em redes?
40. Utilizando o algoritmo maxflow-mincut visto em aula compute o fluxo máximo das seguintes redes.

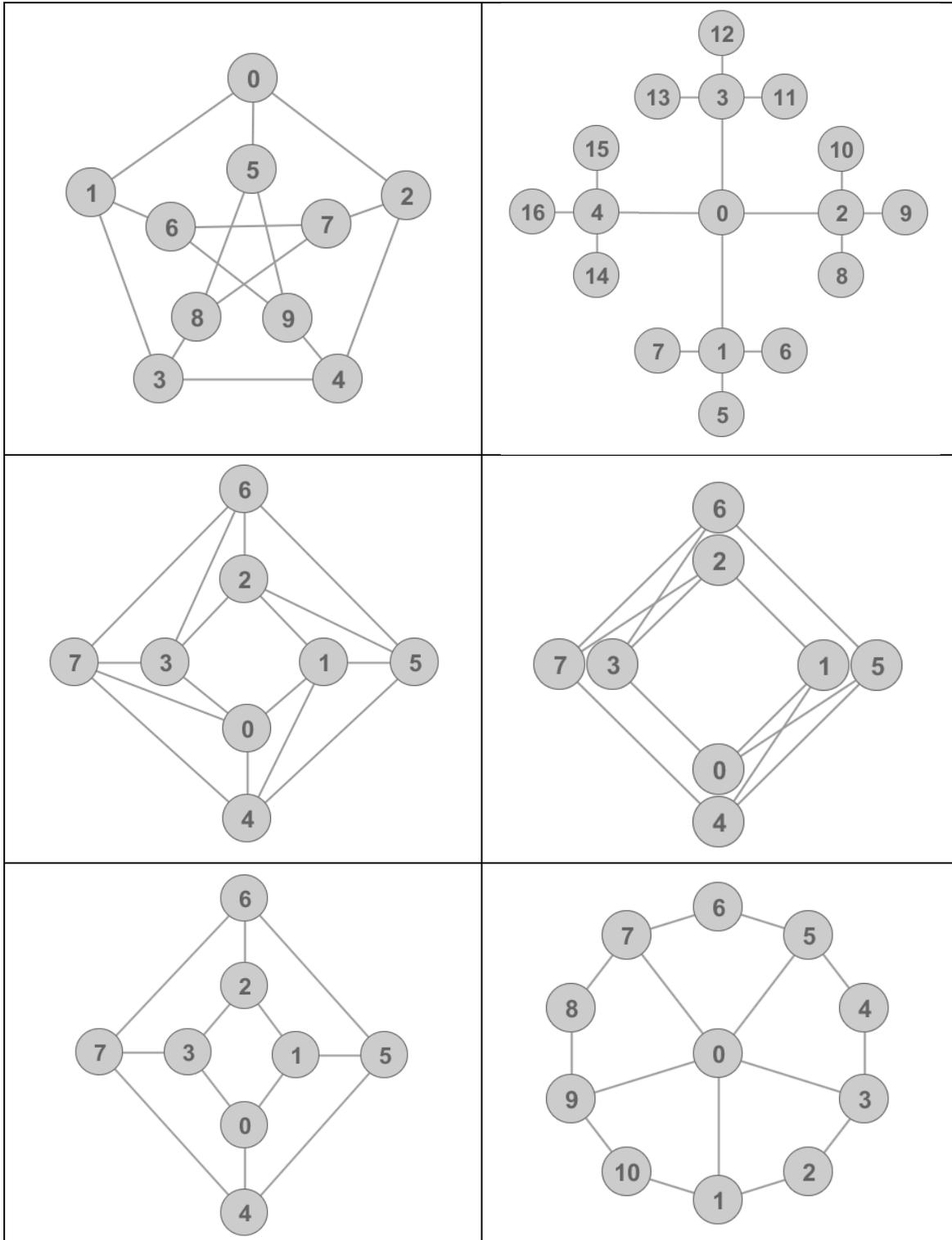


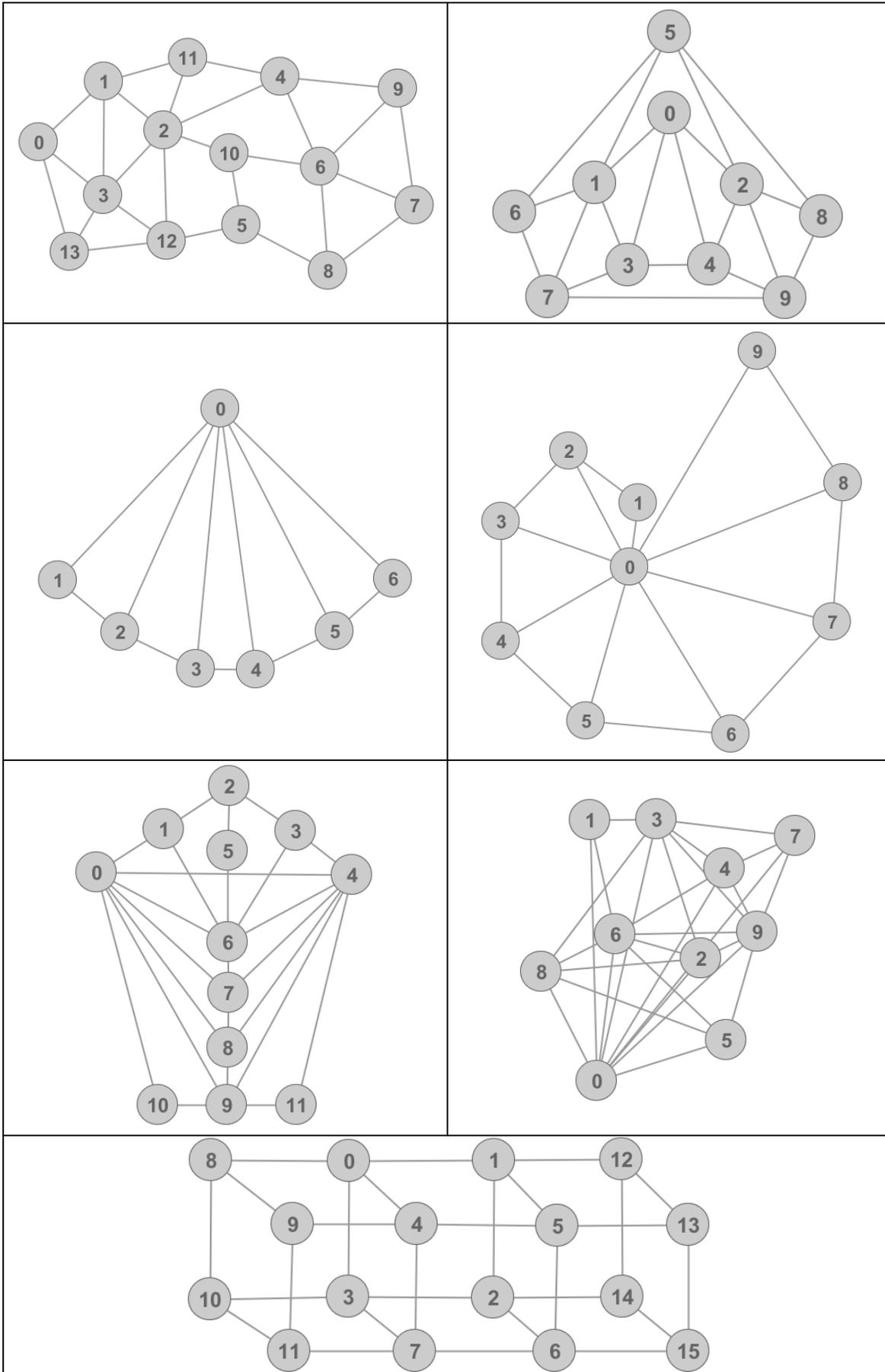
## Anexo 1 - Grafos para os Exercícios



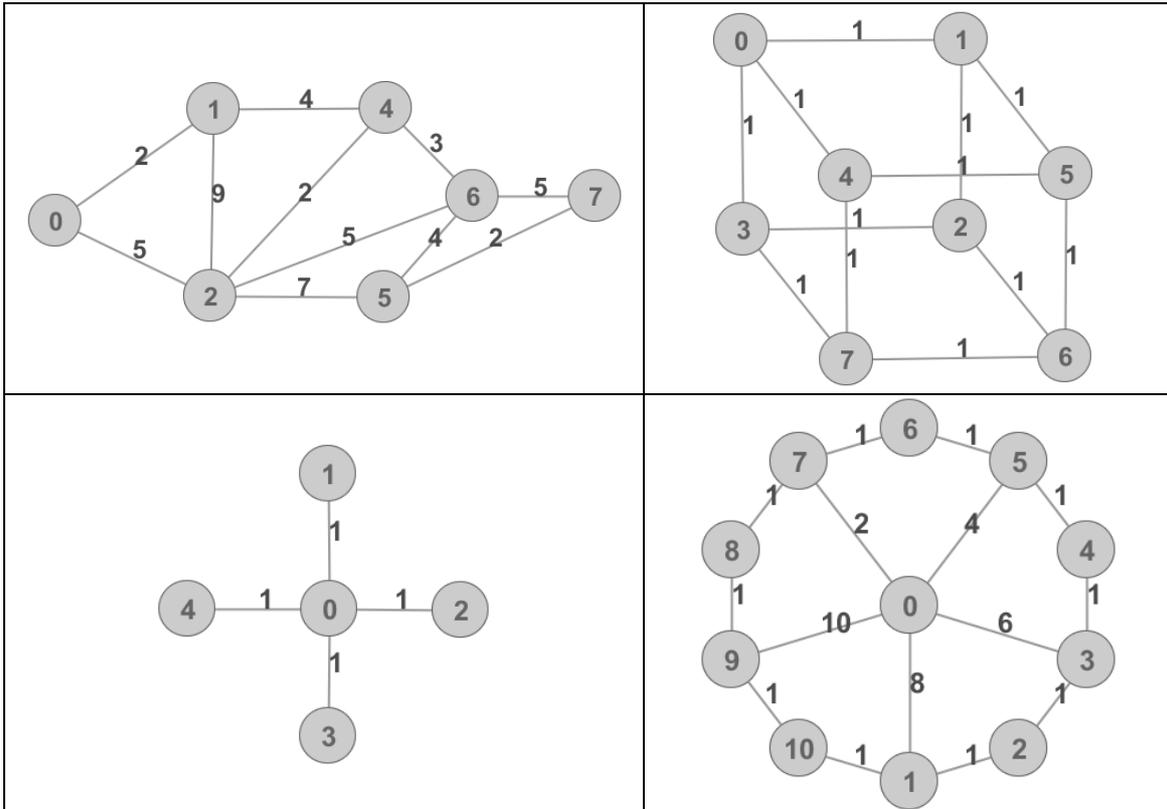


## Anexo 2 - Grafos para os Exercícios





### Anexo 3 - Grafos Valorados



## Anexo 4 - Digrafos para os Exercícios

