Estruturas de Dados

Módulo 13 - Árvores

Referências

Waldemar Celes, Renato Cerqueira, José Lucas Rangel, *Introdução a Estruturas de Dados*, Editora Campus (2004)

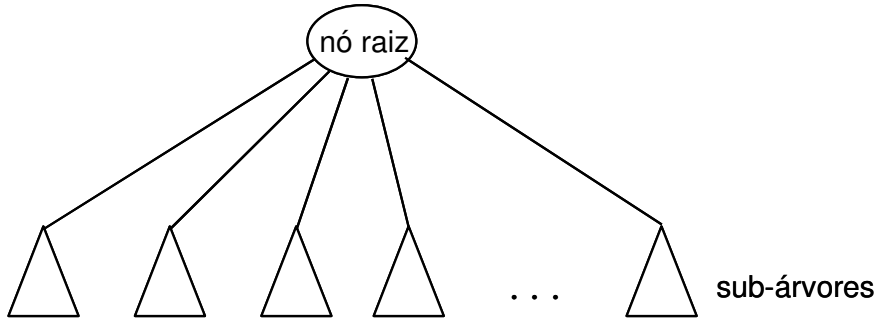
Capítulo 13 – Árvores

Tópicos

- Introdução
- Árvores binárias
  - Representação em C
  - Ordens de percurso em árvores binárias
  - Altura de uma árvore
- Árvores com número variável de filhos
  - Representação em C
  - Tipo abstrato de dado
  - Altura da árvore
  - Topologia binária

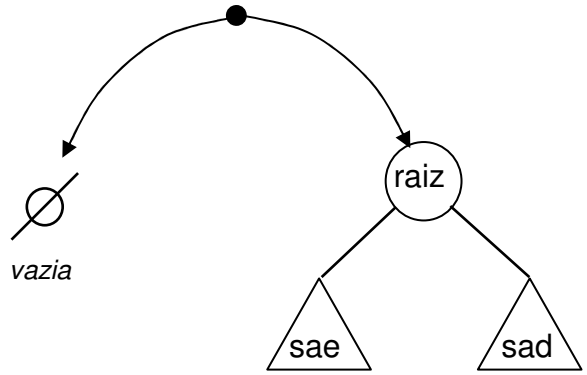
Introdução

- Árvore
  - um conjunto de nós tal que
    - existe um nó r, denominado *raiz*, com zero ou mais sub-árvores, cujas raízes estão ligadas a r
    - os nós raízes destas sub-árvores são os *filhos* de r
    - os *nós internos* da árvore são os nós com filhos
    - *as folhas* ou *nós externos* da árvore são os nós sem filhos



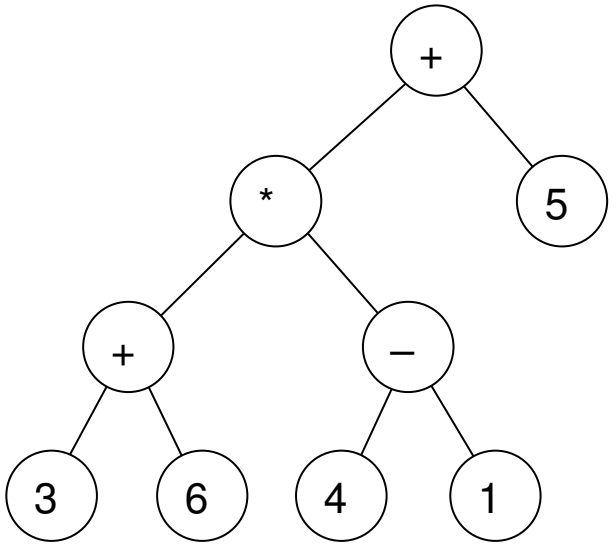
Árvores binárias

- Árvore binária
  - um árvore em que cada nó tem zero, um ou dois filhos
  - uma árvore binária é:
    - uma árvore vazia; ou
    - um nó raiz com duas sub-árvores:
      - a sub-árvore da direita (sad)
      - a sub-árvore da esquerda (sae)



Árvores binárias

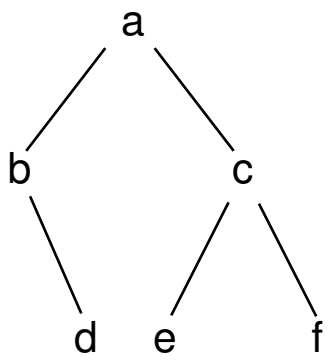
- Exemplo
  - árvores binárias representando expressões aritméticas:
    - nós folhas representam operandos
    - nós internos operadores
    - exemplo: (3+6)*(4-1)+5



Árvores binárias

- Notação textual:
  - a árvore vazia é representada por <>
  - árvores não vazias por <raiz sae sad>
  - exemplo:

<a <b <> <d<><>> > <c <e<><>> <f<><>>> >



Árvores binárias - Implementação em C

- Representação de uma árvore:
  - através de um ponteiro para o nó raiz
- Representação de um nó da árvore:
  - estrutura em C contendo
    - a informação propriamente dita (exemplo: um caractere)
    - dois ponteiros para as sub-árvores, à esquerda e à direita

```
struct arv {
   char info;
   struct arv* esq;
   struct arv* dir;
};
```

Árvores binárias - Implementação em C

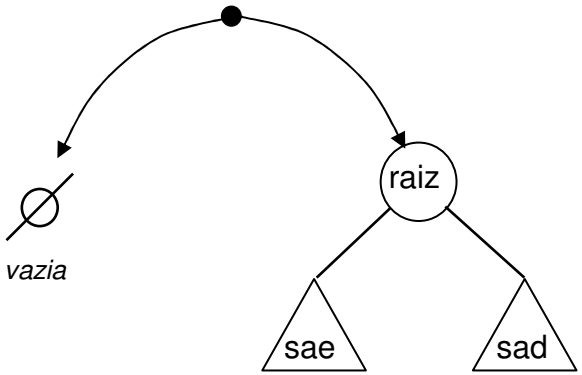
- Interface do tipo abstrato Árvore Binária: arv.h

```
typedef struct arv Arv;

Arv* arv_criavazia (void);
Arv* arv_cria (char c, Arv* e, Arv* d);
Arv* arv_libera (Arv* a);
int  arv_vazia (Arv* a);
int  arv_pertence (Arv* a, char c);
void arv_imprime (Arv* a);
```

Árvores binárias - Implementação em C

- Implementação das funções:
  - implementação recursiva, em geral
  - usa a definição recursiva da estrutura

    Uma árvore binária é:
    - uma árvore vazia; ou
    - um nó raiz com duas sub-árvores:
      - a sub-árvore da direita (sad)
      - a sub-árvore da esquerda (sae)



Árvores binárias - Implementação em C

- função arv_criavazia
  - cria uma árvore vazia

```
Arv* arv_criavazia (void)
{
   return NULL;
}
```

Árvores binárias - Implementação em C

- função arv_cria
  - cria um nó raiz dadas a informação e as duas sub-árvores, a da esquerda e a da direita
  - retorna o endereço do nó raiz criado

```
Arv* arv_cria (char c, Arv* sae, Arv* sad)
{
   Arv* p=(Arv*)malloc(sizeof(Arv));
   p->info = c;
   p->esq = sae;
   p->dir = sad;
   return p;
}
```

Árvores binárias - Implementação em C

- arv_criavazia e arv_cria
  - as duas funções para a criação de árvores representam os dois casos da definição recursiva de árvore binária:
    - uma árvore binária Arv* a;
      - é vazia a=arv_criavazia()
      - é composta por uma raiz e duas sub-árvores a=arv_cria(c,sae,sad);

Árvores binárias - Implementação em C

- função arv_libera
  - libera memória alocada pela estrutura da árvore
    - as sub-árvores devem ser liberadas antes de se liberar o nó raiz
  - retorna uma árvore vazia, representada por NULL

```
Arv* arv_libera (Arv* a){
  if (!arv_vazia(a)){
    arv_libera(a->esq);      /* libera sae */
    arv_libera(a->dir);      /* libera sad */
    free(a);                 /* libera raiz */
  }
  return NULL;
}
```

Árvores binárias - Implementação em C

- função arv_vazia
  - indica se uma árvore é ou não vazia

```
int arv_vazia (Arv* a)
{
   return a==NULL;
}
```

Árvores binárias - Implementação em C

- função arv_pertence
  - verifica a ocorrência de um caractere c em um de nós
  - retorna um valor booleano (1 ou 0) indicando a ocorrência ou não do caractere na árvore

```
int arv_pertence (Arv* a, char c){
   if (arv_vazia(a))
      return 0;                    /* árvore vazia: não encontrou */
   else
      return a->info==c ||
            arv_pertence(a->esq,c) ||
            arv_pertence(a->dir,c);
}
```

Árvores binárias - Implementação em C

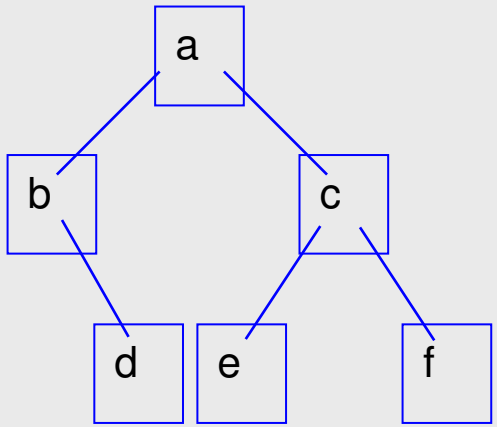
- função arv_imprime
  - percorre recursivamente a árvore, visitando todos os nós e imprimindo sua informação

```
void arv_imprime (Arv* a)
{
   if (!arv_vazia(a)){
      printf("%c ", a->info);          /* mostra raiz */
      arv_imprime(a->esq);             /* mostra sae */
      arv_imprime(a->dir);             /* mostra sad */
   }
}
```

Árvores binárias - Implementação em C

- Exemplo: <a <b <> <d <><><>> > <c <e <><><> > <f <><><> > > >

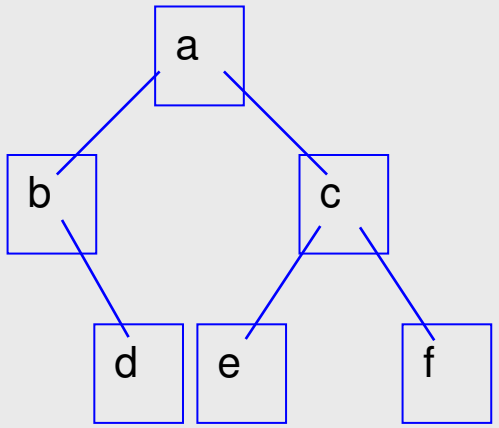
```
/* sub-árvore 'd' */
Arv* a1= arv_cria('d',arv_criavazia(),arv_criavazia());
/* sub-árvore 'b' */
Arv* a2= arv_cria('b',arv_criavazia(),a1);
/* sub-árvore 'e' */
Arv* a3= arv_cria('e',arv_criavazia(),arv_criavazia());
/* sub-árvore 'f' */
Arv* a4= arv_cria('f',arv_criavazia(),arv_criavazia());
/* sub-árvore 'c' */
Arv* a5= arv_cria('c',a3,a4);
/* árvore 'a' */
Arv* a = arv_cria('a',a2,a5 );
```



Árvores binárias - Implementação em C

- Exemplo: <a <b <> <d <><><> > <c <e <><> > <f <><> > > >

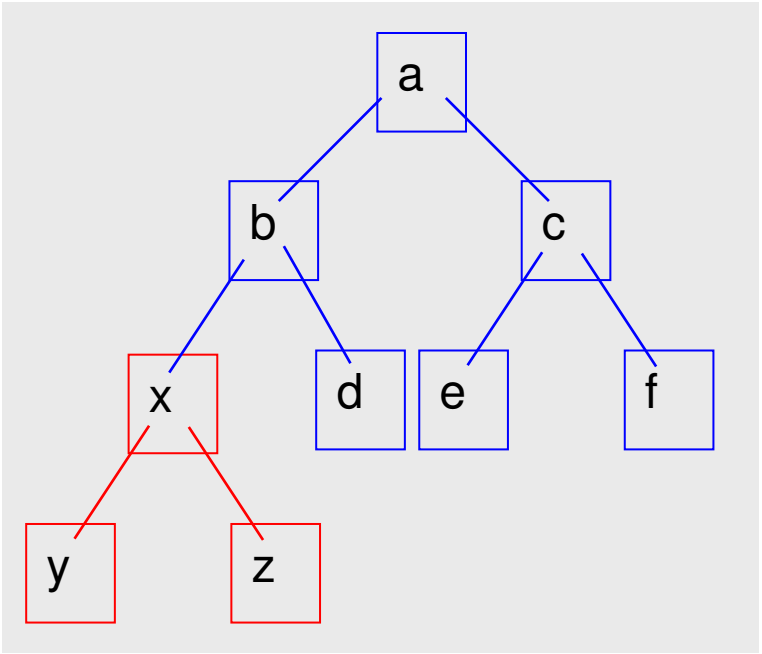
```
Arv* a = arv_cria('a',
            arv_cria('b',
                arv_criavazia(),
                arv_cria('d', arv_criavazia(), arv_criavazia())
            ),
            arv_cria('c',
                arv_cria('e', arv_criavazia(), arv_criavazia()),
                arv_cria('f', arv_criavazia(), arv_criavazia())
            )
           );
```



Árvores binárias - Implementação em C

- Exemplo - acrescenta nós

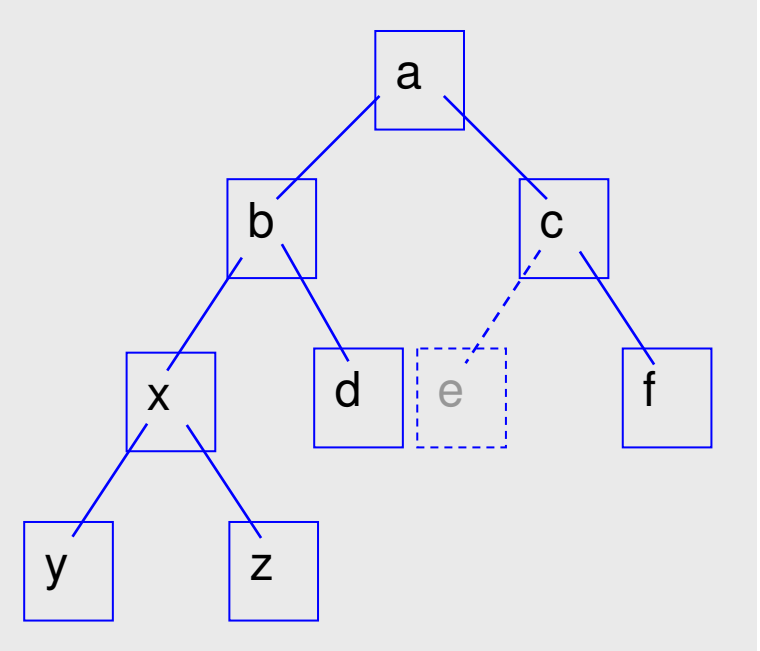
```
a->esq->esq =
   arv_cria('x',
               arv_cria('y',
                        arv_criavazia(),
                        arv_criavazia()),
               arv_cria('z',
                        arv_criavazia(),
                        arv_criavazia())
              );
```



Árvores binárias - Implementação em C

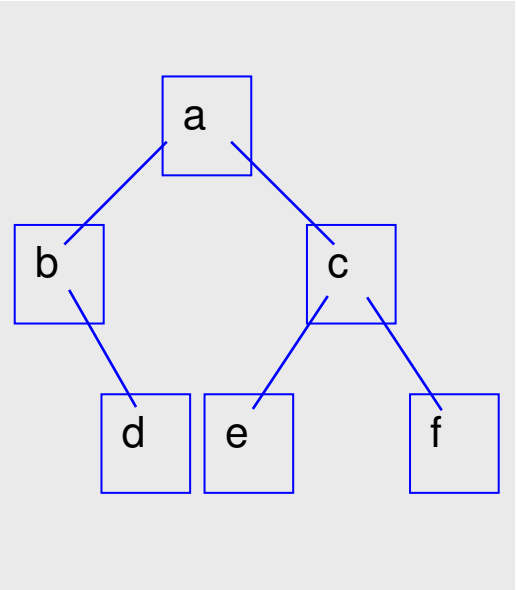
- Exemplo - libera nós

```
a->dir->esq =
            arv_libera(a->dir->esq);
```



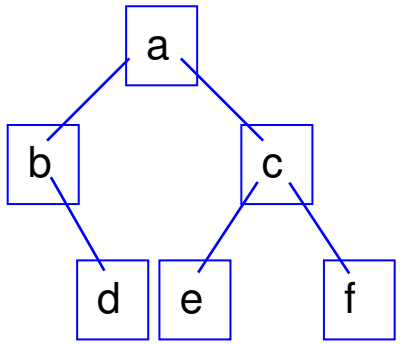
Árvores binárias - Ordens de percurso

- Ordens de percurso:
  - *pré-ordem*:
    - trata *raiz*, percorre *sae*, percorre *sad*
    - exemplo: a b d c e f
  - *ordem simétrica*:
    - percorre *sae*, trata *raiz*, percorre *sad*
    - exemplo: b d a e c f
  - *pós-ordem*:
    - percorre *sae*, percorre *sad*, trata *raiz*
    - exemplo: d b e f c a



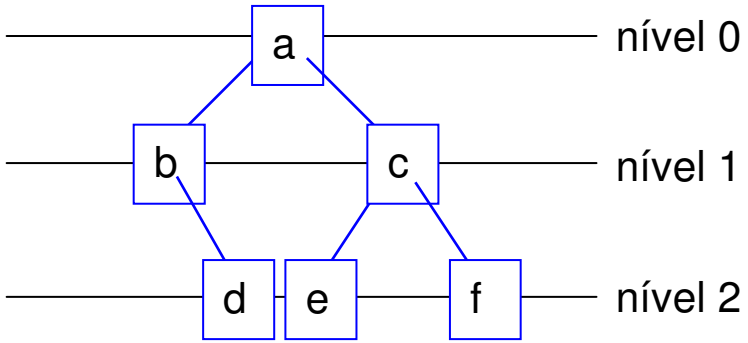
Árvores binárias - Altura

- Propriedade fundamental de árvores
  - só existe um caminho da raiz para qualquer nó
- Altura de uma árvore
  - comprimento do caminho mais longo da raiz até uma das folhas
    - a altura de uma árvore com um único nó raiz é zero
    - a altura de uma árvore vazia é -1
  - exemplo:
    - h = 2



Árvores binárias - Altura

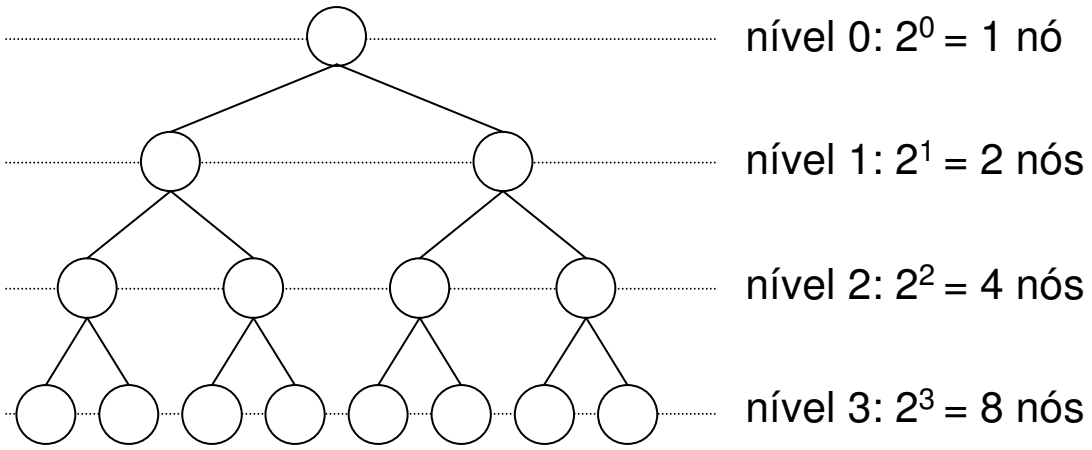
- Nível de um nó
  - a raiz está no nível 0, seus filhos diretos no nível 1, ...
  - o último nível da árvore é a altura da árvore



Árvores binárias - Altura

- Árvore cheia
  - todos os seus nós internos têm duas sub-árvores associadas
  - número *n* de nós de uma árvore cheia de altura *h*

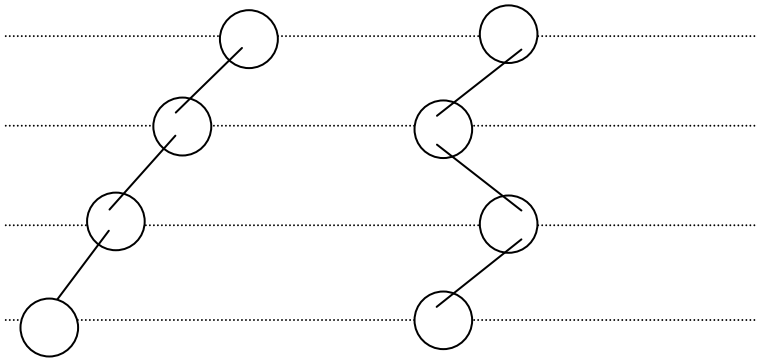
    $n = 2^{h+1} - 1$



Árvores binárias - Altura

- Árvore degenerada
  - todos os seus nós internos têm uma única sub-árvore associada
  - número *n* de nós de uma árvore degenerada de altura *h*

    $n = h+1$

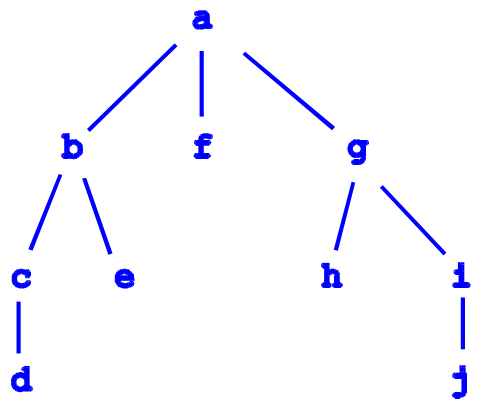


Árvores binárias - Altura

- Esforço computacional necessário para alcançar qualquer nó da árvore
  - proporcional à altura da árvore
  - altura de uma árvore binária com *n* nós
    - mínima: proporcional a *log n* (caso da árvore cheia)
    - máxima: proporcional a *n* (caso da árvore degenerada)

Árvores com número variável de filhos

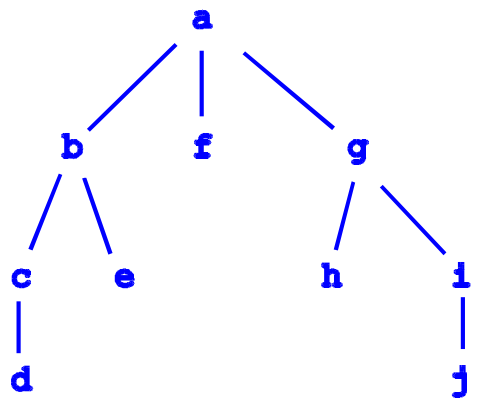
- Árvore com número variável de filhos:
  - cada nó pode ter mais do que duas sub-árvores associadas
  - sub-árvores de um nó dispostas em ordem
    - primeira sub-árvore (*sa1*), segunda sub-árvore (*sa2*), etc.



Árvores com número variável de filhos

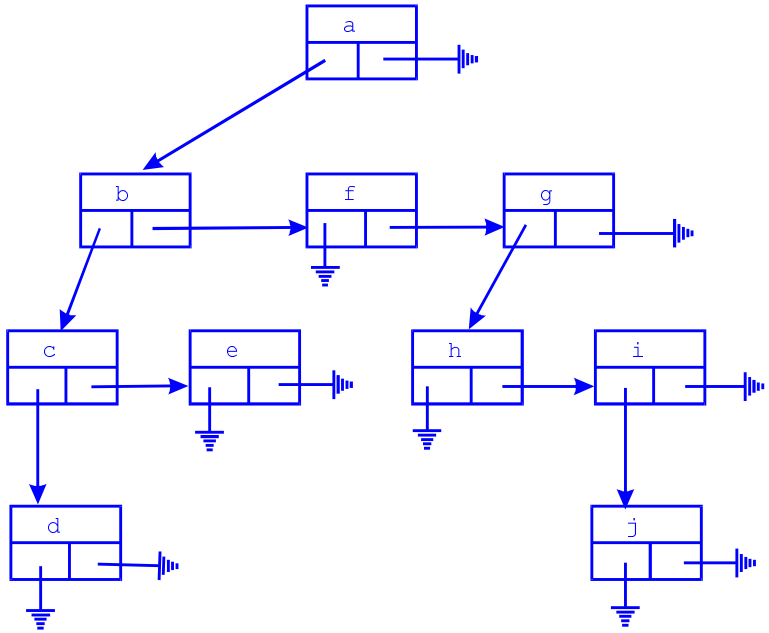
- Notação textual: <raiz sa1 sa2 ... san>
  - exemplo:

    α = <a <b <c <d> > <e> > <f> <g <h> <i <j> > > >



Árvores com número variável de filhos
Representação em C

- Representação de árvore com número variável de filhos:
  - utiliza uma “lista de filhos”:
    - um nó aponta apenas para seu primeiro (prim) filho
    - cada um de seus filhos aponta para o próximo (prox) irmão



Árvores com número variável de filhos
Representação em C

- Representação de um nó da árvore:
  - estrutura em C contendo
    - a informação propriamente dita (exemplo: um caractere)
    - ponteiro para a primeira sub-árvore filha
      - NULL se o nó for uma folha
    - ponteiro para a próxima sub-árvore irmão
      - NULL se for o último filho

```
struct arvvar {
   char info;
   struct arvvar *prim;        /* ponteiro para eventual primeiro filho */
   struct arvvar *prox;        /* ponteiro para eventual irmão */
};

typedef struct arvvar ArvVar;
```

Árvores com número variável de filhos
Representação em C

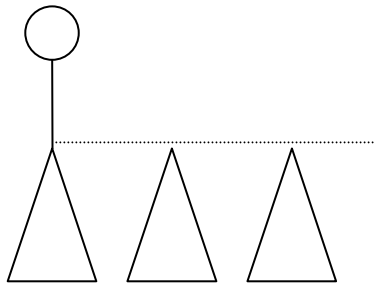
- Interface do tipo abstrato Árvore Variável: arvvar.h

```
typedef struct arvvar ArvVar;

ArvVar* arvv_cria (char c);
void    arvv_insere (ArvVar* a, ArvVar* sa);
void    arvv_imprime (ArvVar* a);
int     arvv_pertence (ArvVar* a, char c);
void    arvv_libera (ArvVar* a);
```

Árvores com número variável de filhos
Representação em C

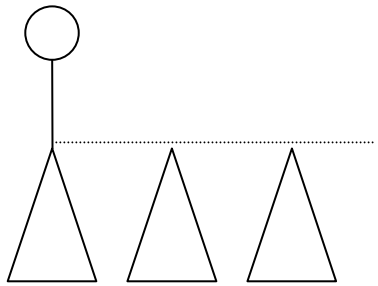
- Implementação das funções:
  - implementação recursiva, em geral
  - usa a definição recursiva da estrutura

    Uma árvore é composta por:
    - um nó raiz
    - zero ou mais sub-árvores



Árvores com número variável de filhos
Representação em C

- Implementação das funções (cont.):
  - uma árvore não pode ser vazia
  - uma folha é identificada como um nó com zero sub-árvores
    - uma folha não é um nó com sub-árvores vazias, como nas árvores binárias
  - funções não consideram o caso de árvores vazias



Árvores com número variável de filhos
Representação em C

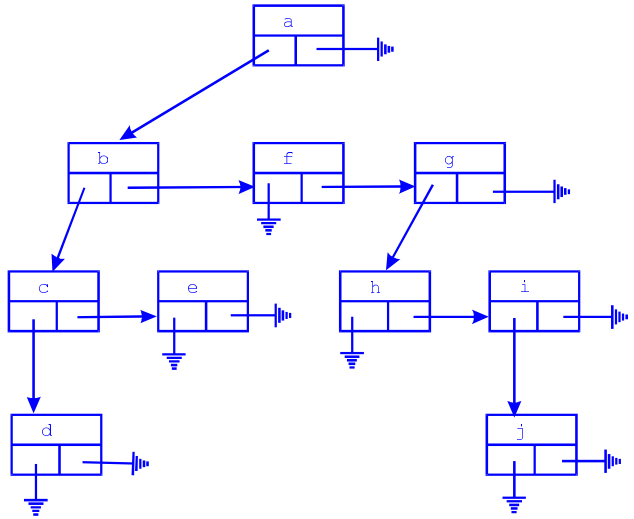
- função arvv_cria
  - cria uma folha
    - aloca o nó
    - inicializa os campos, atribuindo NULL aos campos prim e prox

```
ArvVar* arvv_cria (char c)
{
   ArvVar *a =(ArvVar *) malloc(sizeof(ArvVar));
   a->info = c;
   a->prim = NULL;
   a->prox = NULL;
   return a;
}
```

Árvores com número variável de filhos
Representação em C

- função arvv_insere
  - insere uma nova sub-árvore como filha de um dado, sempre no início da lista, por simplicidade

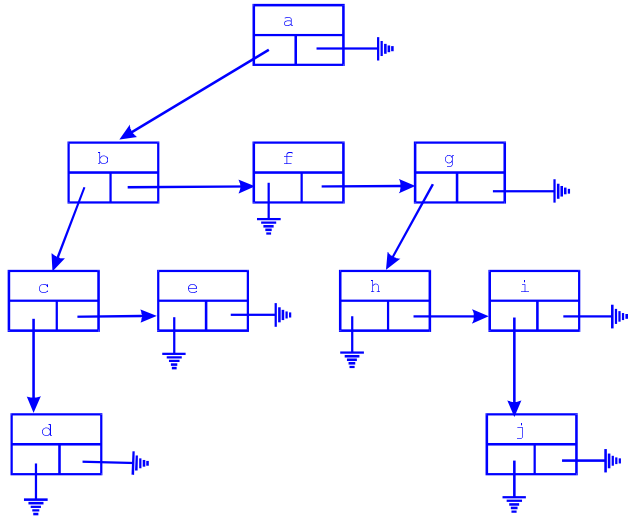
```
void arvv_insere (ArvVar* a, ArvVar* sa)
{
   sa->prox = a->prim;
   a->prim = sa;
}
```



Árvores com número variável de filhos
Representação em C

- função arvv_imprime
  - imprime o conteúdo dos nós em pré-ordem

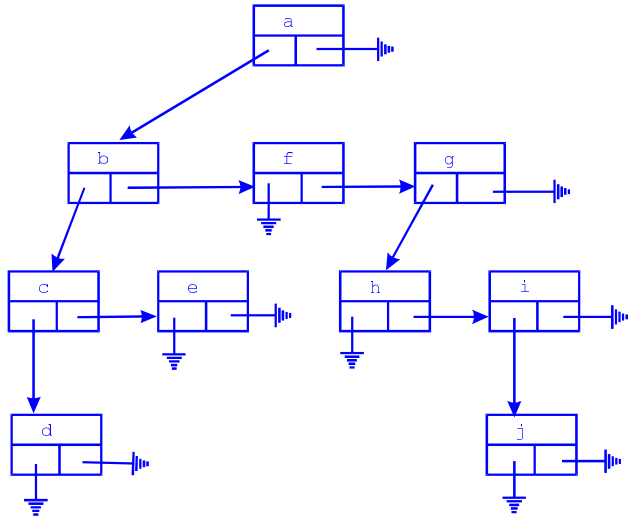
```
void arvv_imprime (ArvVar* a)
{
   ArvVar* p;
   printf("<%c\n",a->info);
   for (p=a->prim; p!=NULL; p=p->prox)
      arvv_imprime(p);   /* imprime filhas */
   printf(">");
}
```



Árvores com número variável de filhos
Representação em C

- função arvv_pertence
  - verifica a ocorrência de uma dada informação na árvore

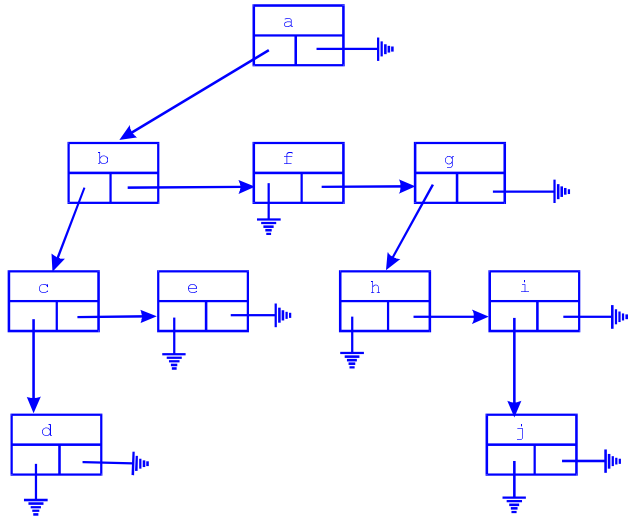
```
int arvv_pertence (ArvVar* a, char c)
{
   ArvVar* p;
   if (a->info==c)
      return 1;
   else {
      for (p=a->prim; p!=NULL; p=p->prox) {
          if (arvv_pertence(p,c))
              return 1;
      }
      return 0;
   }
```



Árvores com número variável de filhos
Representação em C

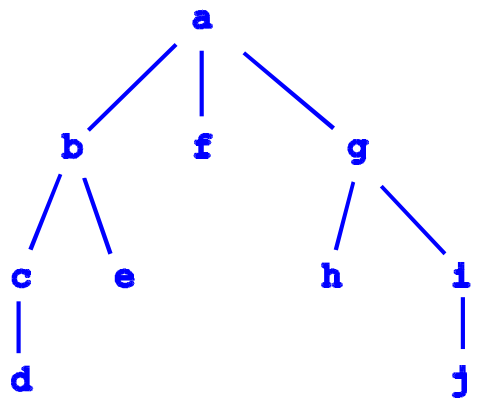
- função arvv_libera
  - libera a memória alocada pela árvore
    - libera as sub-árvores antes de liberar o espaço associado a um nó (libera em pós-ordem)

```
void arvv_libera (ArvVar* a)
{
   ArvVar* p = a->prim;
   while (p!=NULL) {
      ArvVar* t = p->prox;
      arvv_libera(p);
      p = t;
   }
   free(a);
}
```



Árvores com número variável de filhos - Altura

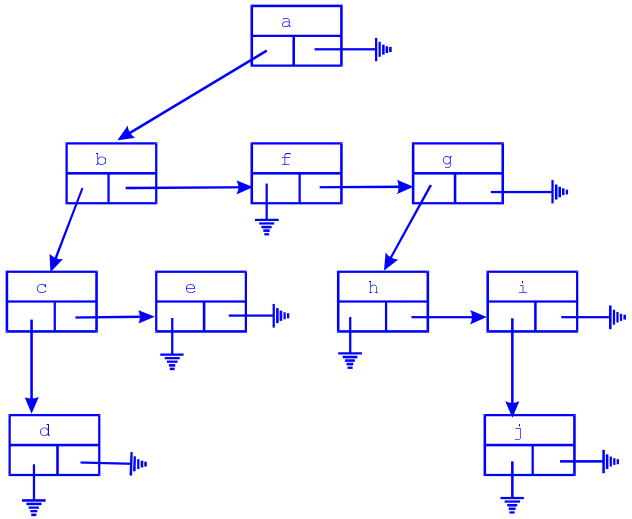
- nível e altura
  - (definidos de forma semelhante a árvores binárias)
  - exemplo:
    - h = 3



Árvores com número variável de filhos - Altura

- função arvv_altura
  - maior altura entre as sub-árvores, acrescido de uma unidade
  - caso o nó raiz não tenha filhos, a altura da árvore deve ser 0

```
int arvv_altura (ArvVar* a)
{
   int hmax = -1;  /* -1 para arv. sem filhos */
   ArvVar* p;
   for (p=a->prim; p!=NULL; p=p->prox) {
      int h = arvv_altura(p);
      if (h > hmax)
          hmax = h;
   }
   return hmax + 1;
}
```



Árvores com número variável de filhos
Topologia Binária

- Topologia binária:
  - representação de um nó de uma árvore variável ≡ representação de um nó da árvore binária
  - nó possui informação e dois ponteiros para sub-árvores
    - árvore binária:
      - ponteiros para as sub-árvores à esquerda e à direita
    - árvores variável:
      - ponteiros para a primeira sub-árvore filha e para a sub-árvore irmã

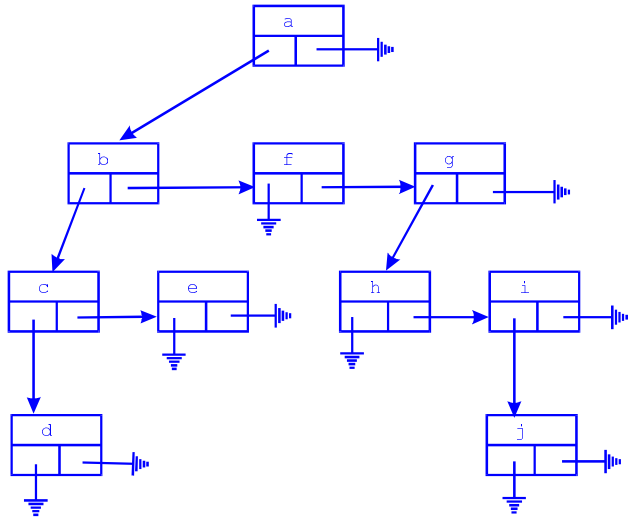
Árvores com número variável de filhos
Topologia Binária

- Topologia binária:
  - redefinição de árvore com número variável de filhos:
    - árvore vazia, ou
    - um nó raiz tendo duas sub-árvores, identificadas como a sub-árvore filha e a sub-árvore irmã
  - re-implementação das funções:
    - pode se basear na nova definição
    - o caso da árvore vazia agora deve ser considerado

Árvores com número variável de filhos
Topologia Binária

- função para calcular altura:
  - a altura da árvore será o maior valor entre
    - a altura da sub-árvore filha acrescido de uma unidade e
    - a altura da sub-árvore irmã

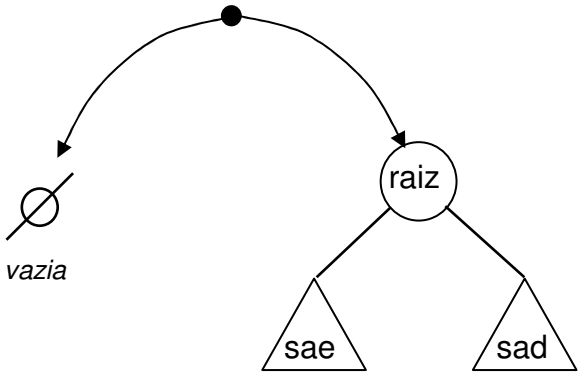
```
static max2 (int a, int b)
{ return (a > b) ? a : b; }

int arvv_altura (ArvVar* a)
{  if (a==NULL)
      return -1;
   else
      return max2(1+arvv_altura(a->prim),
                  arvv_altura(a->prox));
}
```



Resumo

Árvore binária

- uma árvore vazia; ou
- um nó raiz com duas sub-árvores:
  - a sub-árvore da direita (sad)
  - a sub-árvore da esquerda (sae)



Árvore com número variável de filhos

- um nó raiz
- zero ou mais sub-árvores