Lista de Exercícios

Esta lista de exercícios foi criada com o intúito de prover ao aluno uma plataforma para a revisão sistemática do conteúdo visto em aula. Estes exercícios não são de nenhuma maneira uma cobertura perfeita dos possíveis exercícios em teoria dos grafos muito menos um exemplo de questões a serem cobradas em avaliações. Aconselha-se fortemente ao aluno que completar esta lista que use subsequentemente as listas de exercícios do livro texto como fonte adicional de estudos.

CONCEITOS BÁSICOS

1. Dado os grafos abaixo, forneça sua representação gráfica:
   (a) G(V,A) = {V = {a,b,c},A = {}}
   (b) H(V,A) = {V = {1,2,3,4,5},A = {{1,2},{1,3},{1,4},{1,5},{1,6}, {1,7},{1,8},{1,9},{2,3},{2,4},{2,5},{2,6},{2,7},{2,8},{2,9},{3,4}, {3,5},{3,6},{3,7},{3,8},{3,9},{4,5},{4,6},{4,7},{4,8},{4,9},{5,6}, {5,7},{5,8},{5,9},{6,7},{6,8},{6,9},{7,8},{7,9},{8,9}}}
   (c) I(V,A) = {V = {1,2,3,4},A = {{1,2},{2,3},{3,4},{4,1}}}
   (d) J(V,A) = {V = {a,b,c,d,e}, A = {{a,b},{a,c},{a,d},{a,e}}}
   (e) L(V,A) = {V = {x,y,z,w}, A = {{x,y}{s,z},{y,z}}}

2. Qual a diferença entre grafos simples e grafos complexos? Que tipo de estruturas podem estar presentes em um grafo complexo que não podem existir em grafos simples?

3. Seria correto afirmar que um grafo simples é um grafo complexo mas que um grafo complexo não pode ser um grafo simples? Justifique sua resposta com base em lógica proposicional e nas definições de grafos simples e complexo.

4. Dados os grafos dos anexos 1 e 2, forneça sua representação utilizando a notação de teoria dos conjuntos.

5. Considerando os grafos dos anexos 1 e 2, informe suas ordens e tamanhos.

6. Ainda considerando os grafos dos anexos 1 e 2, informe o grau de cada um de seus vértices.

7. identifique o menor grau (d_δ) maior grau (d_Δ) e calcule o grau médio (d_μ) para os grafos do anexo 1.

8. Com base nos grafos dos anexos 1 e 2, informe quais deles possuem vértices isolados.

9. Represente os grafos dos anexos 1 e 2 utilizando matrizes de adjacência.

10. Represente os grafos dos anexos 1 e 2 utilizando matrizes de incidência.

11. Represente os grafos dos anexos 1 e 2 utilizando listas de adjacência.

12. Com base nos grafos dos anexos 1 e 2, informe quais deles são K-regular, e qual o valor de K para aqueles que sejam.

13. Considere a definição de grafos cíclicos dada abaixo. Há alguma característica particular de grafos cíclicos que poderia ser utilizada como definição alternativa? Em caso afirmativo, qual seria ela?

    "O **grafo cíclico** de v vértices, denotado por $\mathbf{C_K}$, é aquele formado por v vértices. O conjunto de arestas obedece a seguinte regra: $A=\{\{1,2\}, \{2,3\},...\{v-1,v\}, \{v,1\}\}$ onde $v \in \mathbb{Z} \wedge v \geq 3$."

14. Considere a definição de grafos completos dada abaixo. O grafo simples definido por um único vértice e nenhuma aresta pode ser considerado um grafo completo? Justifique sua resposta.

    "O **grafo completo** de v vértices, onde $v \in \mathbb{Z}$ denotado por $\mathbf{K_v}$ é aquele composto pelo conjunto de vértices $V = \{1,2, \cdots,v\}$ e o conjunto de arestas contendo todas as possíveis arestas."

15. Sabemos que o número de arestas de um grafo simples completo é dado pela relação: $|A| = \frac{1}{2}|V|(|V|-1)$. Considere um grafo simples completo que contenha 10.000 vértices.

    (a) quantas arestas o grafo em questão conterá?

    (b) considerando que a matriz de adjacência utilize 1 byte para cada célula, quantos bytes serão necessários para armazená-la em memória?

    (c) considerando que a matriz de incidência utilize 1 byte para cada célula, quantos bytes serão necessários para armazená-la em memória?

    (d) Quanto espaço em bytes é desperdiçado pela matriz de adjacência devido a dublicação da informação e células irrelevantes? (uma célula irrelevante é aquela do tipo MA(i,i) que sempre será igual a zero em um grafo simples)

    (e) considerando um sistema computacional com 8 GB de memória dos quais 5 GB estão livres para aplicações do usuário. O sistema operacional deste sistema em questão trabalha com espaços de endereçamento de 32 bits, ou seja, o tamanho máximo que um programa pode assumir é de 4GB. Considerando que o código do programa ocupe 16KB, qual seria a grafo de maior ordem passível de ser representado nesta situação por meio de uma matriz de adjacência?

16. Considere um grafo simples bipartite completo qualquer. Considerando que |X| seja o número de vértices em uma das partições e |Y| o número de vértices na segunda partição, quantas arestas existirão neste grafo? (Relembre a fórmula para o número de arestas em grafos completos e use ela como base para trabalhar a fórmula para grafos bipartite).

17. Sabemos que a matriz de adjacência desperdiça muito espaço de armazenamento pois a diagonal principal é sempre zero e a matriz é simétrica, ou seja, a informação do triângulo inferior é replicada no triângulo superior. Dado um grafo simples G qualquer, se provarmos que ele é bipartite podemos diminuir consideravelmente o espaço de armazenamento necessário para a matriz de adjacência. Identifique na anexo 1 quais grafos são bipartite e represente-os utilizando matrizes de adjacência bipartite. A seguir, calcule a porcentagem de espaço (em número de células) economizada em relação a representação por matriz de adjacência.

18. Utilizando os grafos dos anexos 1 e 2 como base, desenhe os grafos inversos deles.

19. Utilizando os os grafos dos anexos 1 e 2, forneça ao menos um subgrafo gerador para cada grafo do anexo caso eles assim o admitam. Para os grafos que eventualmente não possuir um subgrafo gerador, forneça uma justificativa para tal.

20. Escreva um programa em C ou qualquer outra linguagem de sua preferência que execute as seguintes tarefas:
(a) leia uma sequência de números X do teclado e a armazene em um array;

(b) interprete a sequência de X números como uma matriz de NxM (N linhas e M colunas) e a converta para uma matriz de incidência. Note que N representa o número de vértices e M o número arestas. NxM = X.

(c) interprete a sequência de X números como uma matriz de NxN (N é o número de vértices) e a converta para uma matriz de adjacência.

(d) o programa deve ser capaz de verificar que |X| é condizente com a transformação que se deseja executar (matriz de incidência ou adjacência).

(e) escreva uma função que dada a matriz de incidência e um vértice como entrada, compute o grau deste vértice d(v).

(f) escreva uma função que dada uma matriz de incidência compute o grau máximo.

(g) escreva uma função que dada uma matriz de incidência compute o grau máximo.

(h) escreva uma função que dada uma matriz de incidência compute o grau máximo.

(i) escreva uma função que dada uma matriz de incidência compute o grau médio.

(j) escreva uma função que responda categoricamente (SIM ou NÃO) se o grafo é conexo.

(k) escreva uma função que responda categoricamente (SIM ou NÃO) se o grafo é NULO.

(l) Extenda o programa para que ele seja capaz de ler uma segunda sequência de números Y do teclado e que seja capaz de também a converter para uma matriz de adjacência.

(m) escreva uma função que responda categoricamente (SIM ou NÃO) se dois grafos são iguais.

(n) escreva uma função que dada uma matriz de adjacência como entrada, imprima na saída padrão a representação em conjuntos do grafo. (imprima o conjunto de vértices e arestas: V={a,b,c...}, A={a,b},{b,c}, ...).

(o) escreva uma função que tendo como entrada uma matriz de adjacência e dois vértices u,v ∈ V responda se existe um caminho entre u e v.

(p) escreva uma função que tendo como entrada uma matriz de adjacência e dois vértices u,v ∈ V imprima a sequência de vértices de um caminho que leva de u até v.

(q) escreva uma função que tendo como entrada uma matriz de incidência e dois vértices $u,v \in V$ responda se existe um caminho entre u e v.

(r) escreva uma função que receba como parâmetro duas matrizes de adjacência representando dois grafos G e H. A função deve retornar uma matriz de adjacência do grafo que é a intersecção de G e H.

(s) escreva uma função que receba como parâmetro duas matrizes de adjacência representando dois grafos G e H. A função deve retornar uma matriz de adjacência do grafo que é a união de G e H.

(t) escreva uma função que receba como parâmetro uma matriz de adjacência e responda categoricamente (SIM ou NÃO) se o grafo em questão é K-regular. A função deve ainda retornar o valor de K em caso afirmativo. (Utilize retorno de valores por referência por exemplo)

(u) escreva uma função que dado um grafo simples G qualquer informe categoricamente (SIM ou NÃO) se o grafo em questão é ou não bipartite. (lembre-se que um grafo bipartite subdivide V em dois grupos X e Y, e que não pode existir arestas entre vértices do mesmo subgrupo. Como um vértice tem necessariamente que existir em um dos dois grupos, pegue um vértice randômicamente e atribua ele a qualquer dos dois grupos. A partir daí você sabe que os vértices adjacentes devem estar no outro grupo)

(v) escreva uma função que dado um grafo simples G qualquer verifique se o grafo é bipartite e em caso afirmativo, particione V em V_1 e V_2 e retorne estes subconjuntos de V.

(w) escreva uma função que dada a matriz de adjacência de um grafo simples G qualquer retorne a matriz de adjacência de seu complemento.

(x) escreva uma função que receba duas matrizes de adjacência dos grafos G e H e responda categoricamente (SIM ou NÃO) se H é subgrafo de G.

(y) escreva uma função que receba duas matrizes de adjacência dos grafos G e H e responda categoricamente (SIM ou NÃO) se G é supergrafo de H.

(z) escreva uma função que receba duas matrizes de adjacência dos grafos G e H e responda categoricamente (SIM ou NÃO) se H é um subgrafo gerador de G.

(1a) escreva uma função que responda categoricamente (SIM ou NÃO) se um dado grafo é conexo.

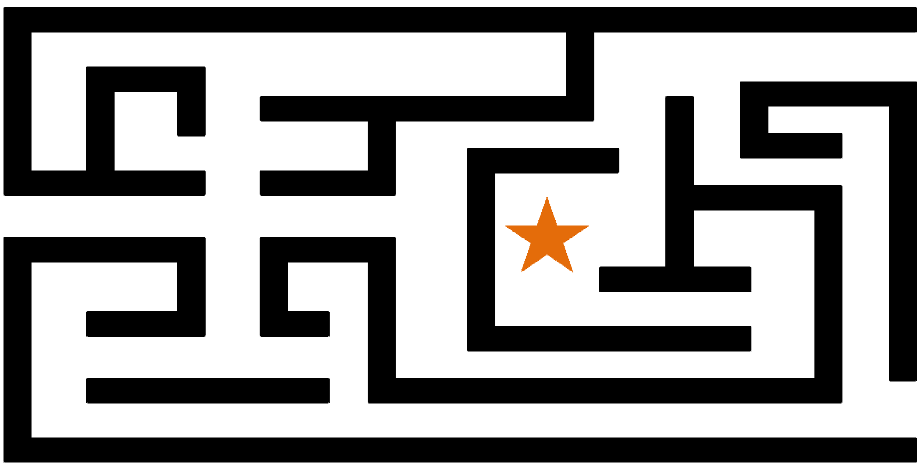
(1b) escreva uma função que retorne todos os componentes conexos de um grafo.

(1c) escreva uma função que receba como parâmetros a matriz de adjacência de um grafo G e dois vértices u e v. A função deve computar a distância de u para v e retorná-la.

(1d) escreva uma função que retorne a distância mínima entre dois vértices.

(**EXTRA**) Escreva uma função que tendo como entrada a matriz de adjacência de um grafo plote graficamente o grafo. (utilize por exemplo a biblioteca graphviz para facilitar sua vida!)

21. Considere o labirinto apresentado na figura a seguir. Este é um problema trivial que muitos de nós humanos resolvemos a título de entretenimento. No entanto ele se apresenta como um problema complexo para um computador resolver. A primeira dificuldade refere-se a transportar o labirinto para uma representação computacional adequada. Assumindo que o labirinto seja apresentado como uma imagem, faz-se necessário que técnicas de processamento de imagens sejam empregadas. Assumindo uma função que transforme a imagem do labirinto em um conjunto de pontos que representam as intersecções do labirinto, como poderíamos modelar e subsequentemente resolver o problema: Iniciando-se em uma das três entradas encontrar um caminho que leve ao centro (estrela) do labirinto?

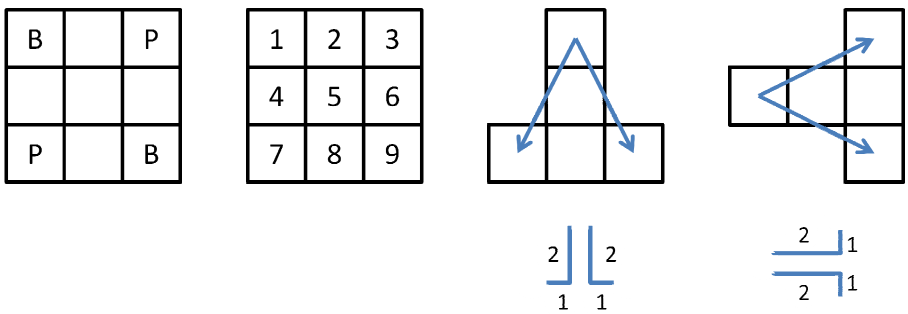


22. Dado um grafo simples G de ordem N, considerando a matriz de adjacência de G e ainda considerando que cada célula da matriz de adjacência ocupe exatamente 1 byte, quantos bytes serão

desperdiçados devido a replicação na matriz de adjacência. Apresente seu raciocínio e cálculos.

23. Qual a diferença entre passeios e caminhos em um grafo? Seria correto afirmar que um caminho é um passeio mas que um passeio não é necessariamente um caminho? Justifique sua resposta.

24. Modele os seguintes problemas utilizando grafos simples:
(a) Dado os números inteiros na faixa [1..9]. Considere uma regra de relação entre eles que estabelece uma relação entre números cuja soma dos algarismos seja um número múltiplo de 3. EX: números 1 e 2, a soma dos algarismos é 3 que obviamente é multiplo de 3. Sendo assim eles são relacionados. Considere agora os números 3 e 7. A soma é 10 que naturalmente não é múltiplo de 3, consequentemente eles não são relacionados.
(b) Considere o mini tabuleiro de xadrez apresentado abaixo (figura da esquerda).



25. Uma rede de computadores em Anel é aquela que cada computador e ligado a dois outros, necessariamente aos computadores localizados imediatamente a sua direita e esquerda. Considere uma rede em anel composta por 10 computadores. Um computador A pode enviar uma mensagem para o computador B diretamente apenas se B estiver imediatamente a esquerda ou a direita de A. Caso este não seja o caso, o Computador A enviará a mensagem para algum de seus vizinhos que retransmitirá a mensagem para seu vizinho até que ela chegue ao computador B.

(a) Modele o problema utilizando a teoria dos grafos.

(b) O grafo resultante é alguns dos tipos especiais de grafos que estudamos? Em caso positivo nomeie-o e justifique sua resposta.

(c) Qual seria o pior caso em termos de número de computadores intermediários a serem utilizados? Explique o raciocício.

26. Considerando os grafos do anexo 3 calcule o peso total do grafo. O peso total eh o somatório do peso de todas as arestas.

27. Considerando os grafos do anexo 3 estipule caminhos plausíveis e compute a distância entre os vértices inicial e final.

28. Considerando os grafos do anexo 4 calcule o grau de entrada e de saída para todos os vértices de todos os vértices.

ISOMORFISMO, AUTOMORFISMO E HOMOMORFISMO

29. Defina os termos isomorfismo, automorfismo e homomorfismo no contexto de teoria dos grafos e aponte as diferenças entre eles com base em suas definições.

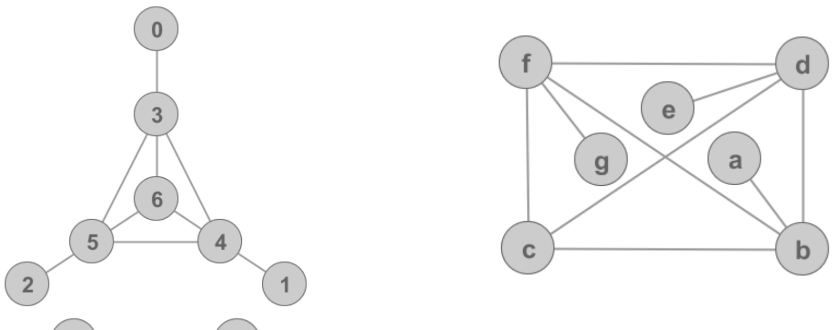
30. Seria correto afirmar que dois grafos que possuem a mesma representação algébrica são iguais e consequentemente isomórficos a despeito de serem apresentados graficamente de maneira distinta? Justifique sua resposta.

31. Seria correto afirmar que um automorfismo é sempre um isomorfismo, mas que nem todo isomorfismo é um automorfismo? Forneça um par de grafos de exemplo e justifique sua resposta.

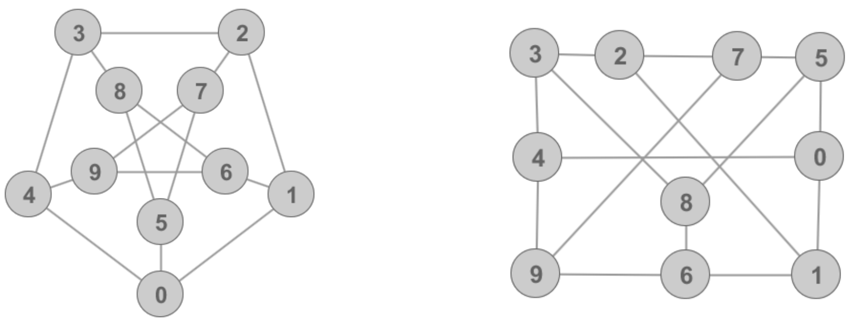
32. Utilizando os pares de grafos apresentados a seguir, defina se eles são ou não isomórficos. Apresente sua justificativa por meio da função de mapeamento.

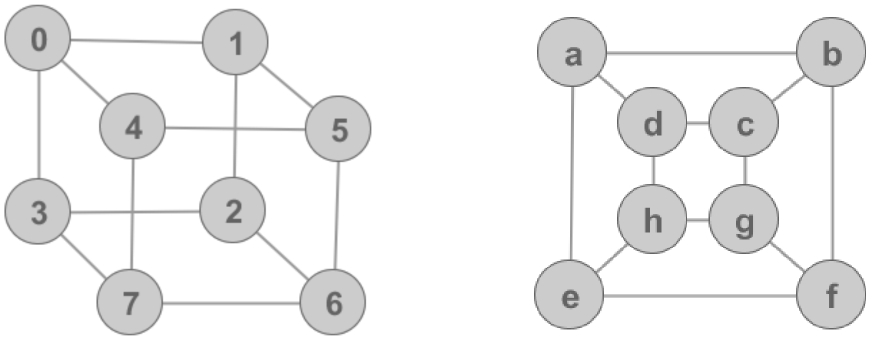
a)

b)



c)



d) 

33. Escolha ao menos cinco grafos dentre os disponíveis nos anexos 1 e 2 forneça ao menos dois homomorfismos para cada um deles.

34. Forneça o conjunto de todos os automorfismos Aut(G) para os grafos dos anexos 1 e 2.

35. Sabemos que determinar se dois grafos simples quaisquer G e H são isomórficos é um problema NP, e consequentemente não possui solução em tempo polinomial. Embora este não seja um problema para grafos de ordem reduzida grafos decorrentes de problemas reais possuem geralmente ordens proibitivas. A alternativa é utilizar métodos heurísticos. Em geral buscamos encontrar características ou estruturas que existem em um deles e que não existe no outro para assim decidirmos que os grafos não são isomórficos. Cite pelo menos três evidências que podemos buscar em grafos para provar que eles não são isomórficos.

PLANARIDADE

36. Vimos que grafos planares são de especial interesse em problemas de roteamento tal como na geração do layout de circuitos impressos. Pesquise na internet que outros problemas requerem que sua modelagem em termos de teoria dos grafos requer que este seja planar.

37. Qual a diferença entre um grafo planar e um grafo plano?

38. O que são regiões no contexto de teoria dos grafos?

39. Como regiões são definidas?

40. Defina o princípio da casa dos pombos e discuta como ele pode ser útil no processo de provas em teoria dos grafos.

41. Com base nos grafos apresentados nos anexos 1 e 2 identifique quais são planares.

42. Identifique as regiões dos grafos planares dentre os apresentados nos anexos 1 e 2.

43. Defina as regiões dos grafos planares dentre os apresentados nos anexos 1 e 2 com base em seus vértices e arestas de borda.

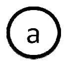
44. Seria correto afirmar que TODO grafo bipartido completo é planar? Justifique sua resposta.

45. Seria correto afirmar que todo grafo com grau máximo igual a dois é planar? Justifique sua resposta.

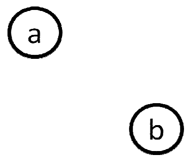
46. Descreva apresentando um exemplo como podemos testar para não-planaridade utilizando o teorema de Jordan.

Anexo 1 - Grafos para os Exercícios

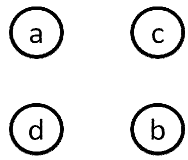
(1)



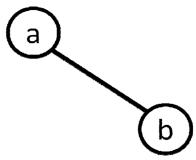
(2)



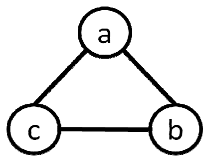
(3)



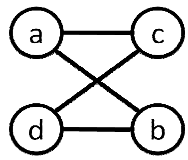
(4)



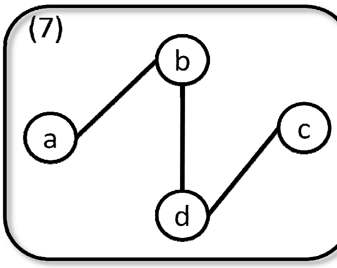
(5)



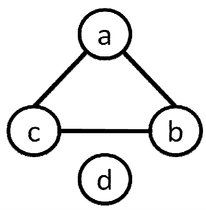
(6)



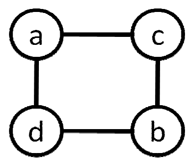
(7)



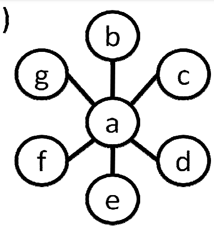
(8)



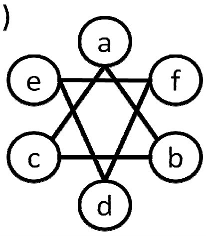
(9)



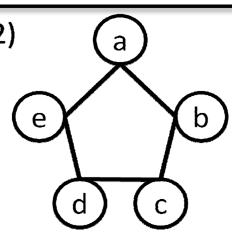
(10)



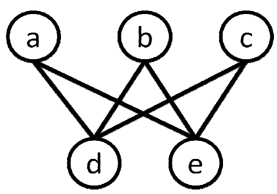
(11)



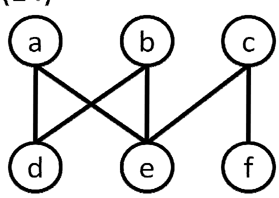
(12)



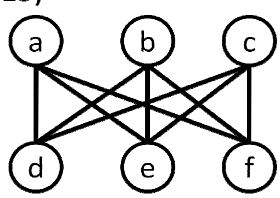
(13)



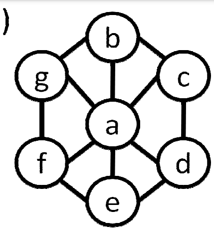
(14)



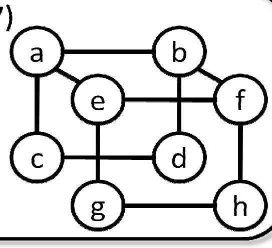
(15)



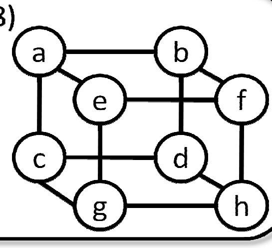
(16)

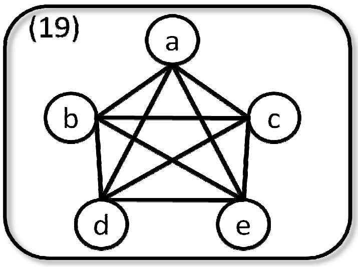


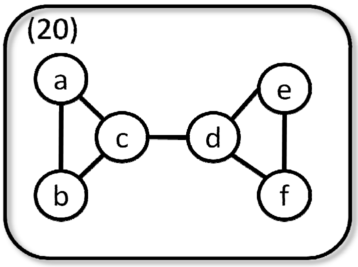
(17)

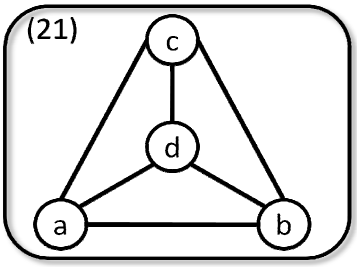


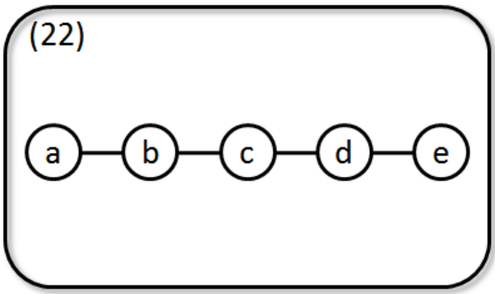
(18)

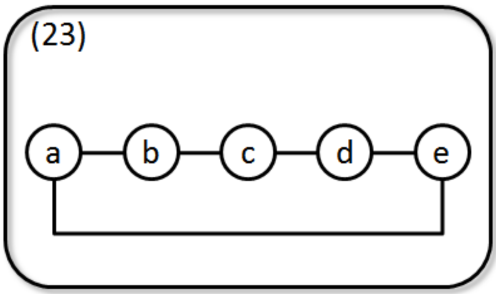



(19)
a
b
c
d
e

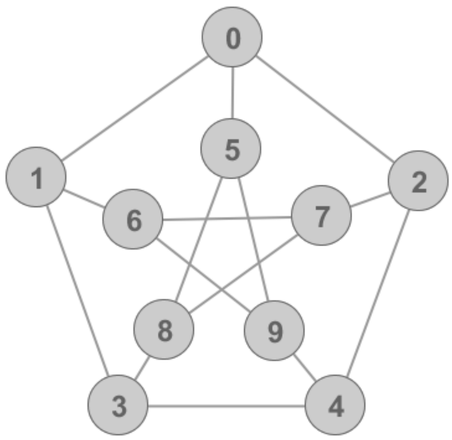

(20)
a
b
c
d
e
f

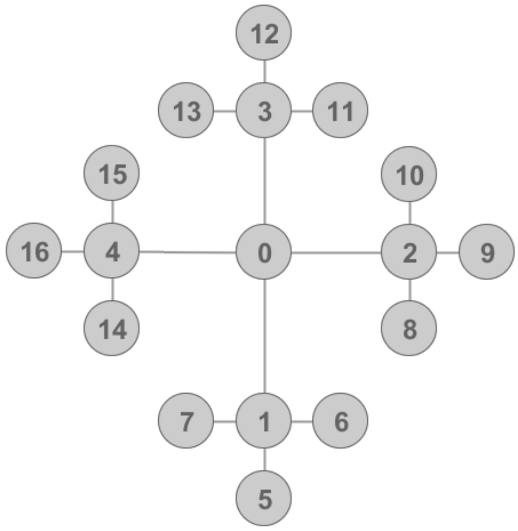

(21)
c
d
a
b

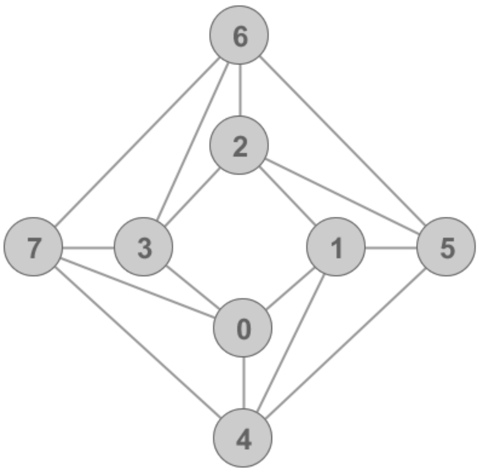

(22)
a
b
c
d
e

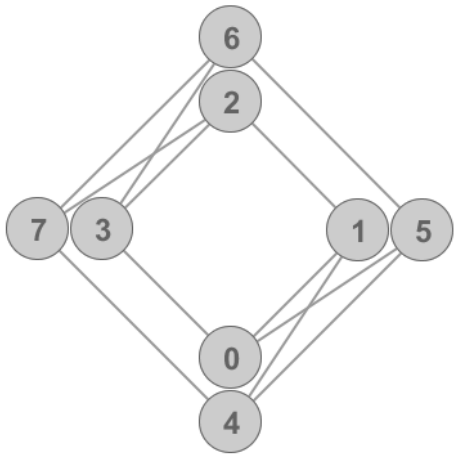

(23)
a
b
c
d
e

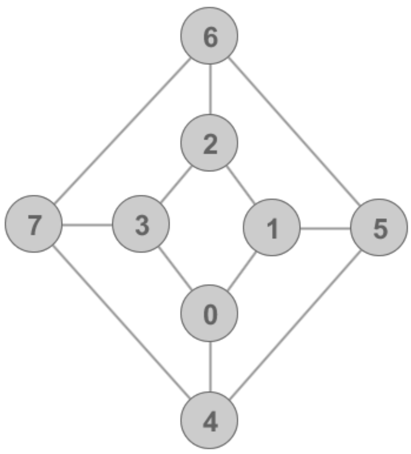
Anexo 2 - Grafos para os Exercícios

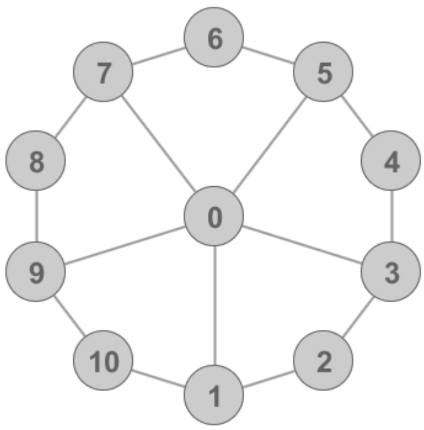


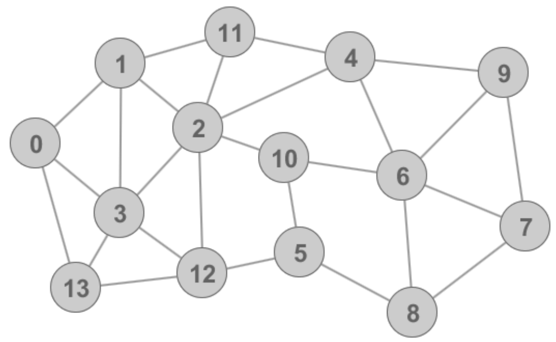


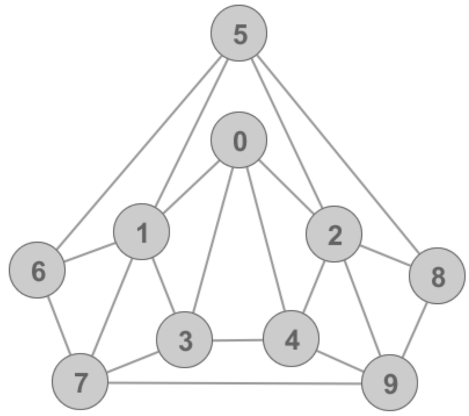


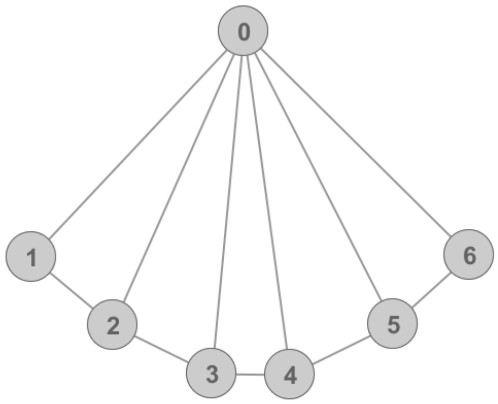


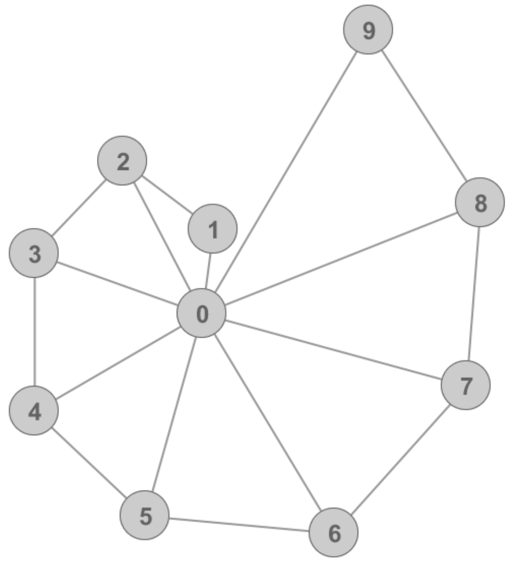


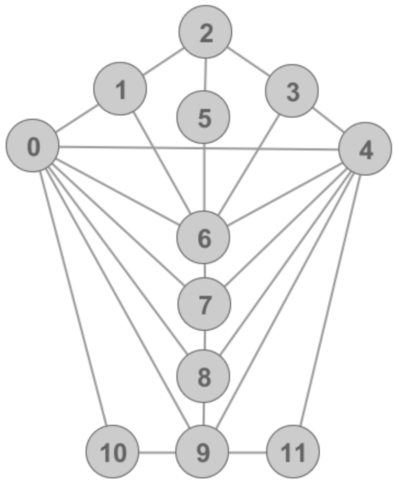


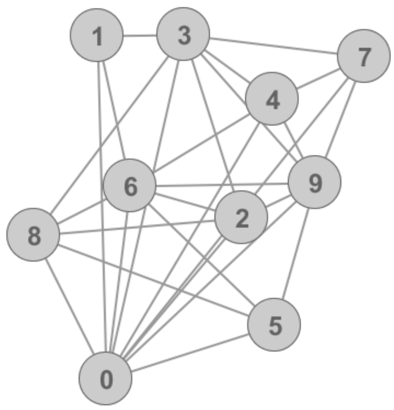

11
1
4
9
2
0
10
6
3
7
5
13
12
8

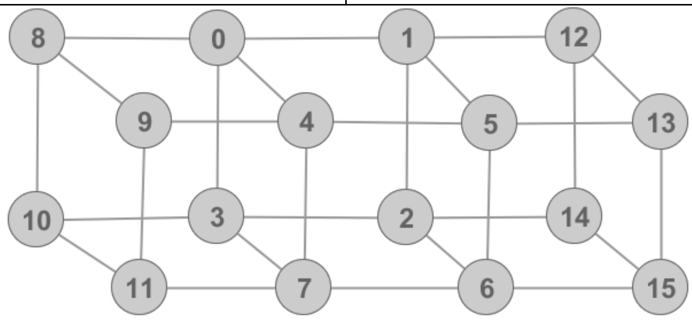

5
0
1
2
6
8
3
4
7
9


0
1
6
2
5
3
4

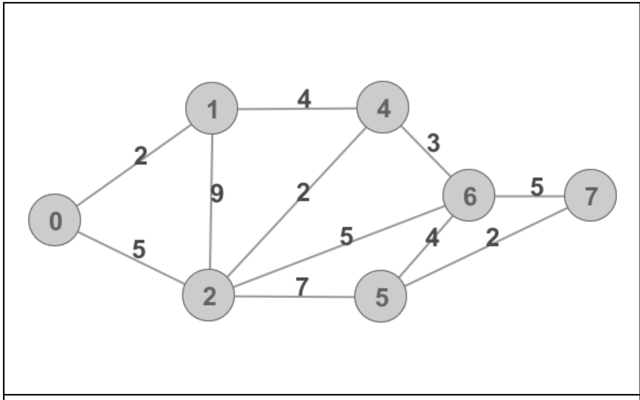

9
2
8
1
3
0
7
4
5
6

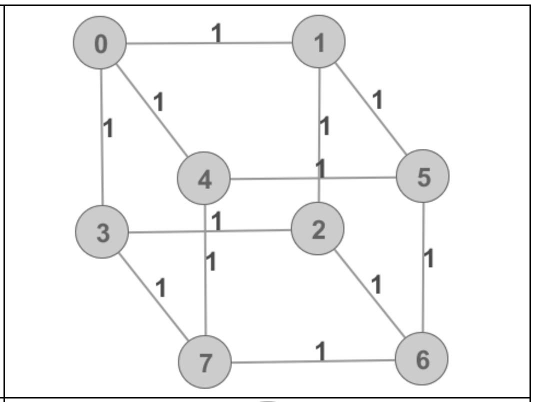

2
1
3
5
0
4
6
7
8
10
9
11

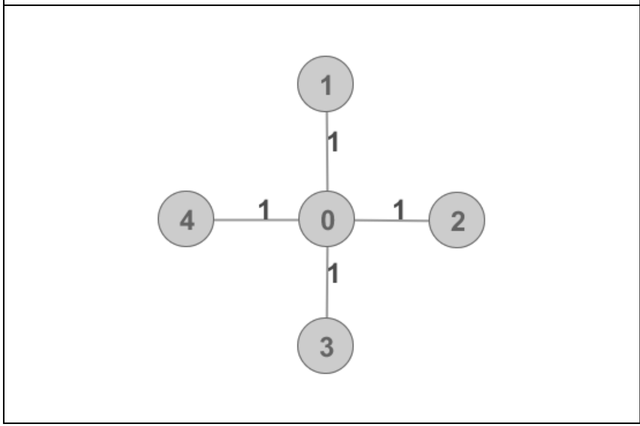

1
3
7
4
6
9
2
8
5
0

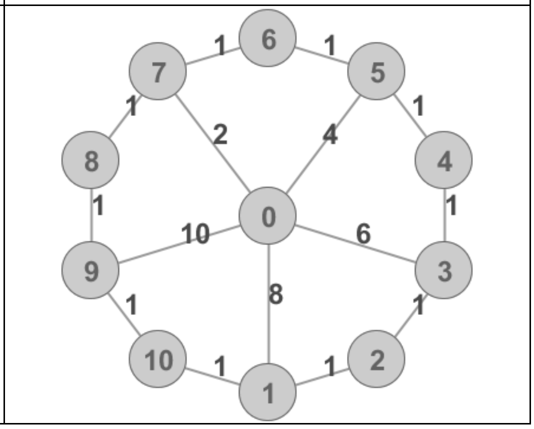

8
0
1
12
9
4
5
13
10
3
2
14
11
7
6
15

Anexo 3 - Grafos Valorados









Anexo 4 - Digrafos para os Exercícios