Motivação

	Segurança			
Tipo algoritmo	80	128	192	256
RSA	1024 bits	3072 bits	7680 bits	15360 bits
Diffie-Hellman	1024 bits	3072 bits	7680 bits	15360 bits
Curvas elípticas	**160 bits**	**256 bits**	**384 bits**	**512 bits**

- Curvas elípticas são vulneráveis apenas aos ataques genéricos contra grupos

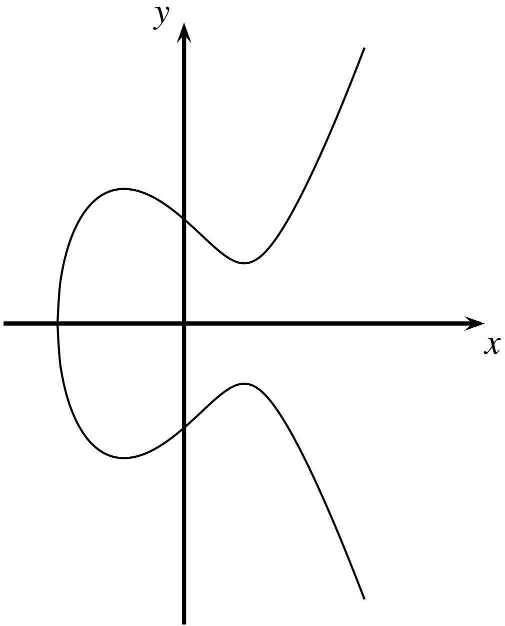
História e outros

- Inventado independentemente por N. Koblitz (1987) e V. Miller (1986)
- Não adotado inicialmente devido especulações sobre sua segurança
- Adoção a partir dos anos 2000 padrões bancários
- Problemas com patentes
- Mais em `http://eprint.iacr.org/2008/390.pdf`

Curva elíptica

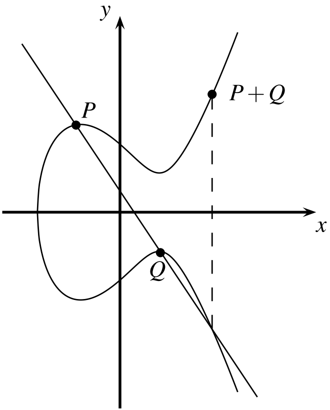
- Curva elíptica em $\mathbb{Z}_p$, $p > 3$ é o conjunto de pares $(x, y) \in \mathbb{Z}_p$ que atende
$$y^2 \equiv x^3 + a \cdot x + b \mod p$$
em conjunto com ponto "imaginário" do infinito $\mathcal{O}$
- onde $a, b \in \mathbb{Z}_p$ e vale que $4 \cdot a^3 + 27 \cdot b^2 \neq 0 \mod p$
- Operações são baseadas em um método de desenho chamado "tangente e corda"

Curva elíptica: $y^2 = x^3 - 3x + 3$



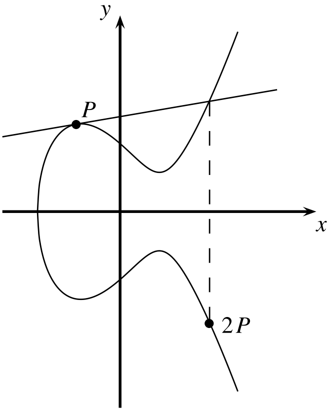
Operações de grupos em curvas elípticas

- Como fazer $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = R$?
  $P + Q = R$?
  - "desenhar reta passando por P e Q para pegar ponto de interseção com a curva elíptica: R vai ser esse ponto espelhado no eixo horizontal"



Operações de grupos em curvas elípticas

- Como fazer $(x_1, y_1) + (x_1, y_1) = R$?
  $P + P = R$?
  - "desenhar tangente a P para pegar ponto de interseção com a curva elíptica: $2P$ vai ser esse ponto espelhando no eixo horizontal"



Soma e duplicação de pontos em uma curva elíptica

- $x_3 \equiv s^2 - x_1 - x_2 \mod p$
- $y_3 \equiv s(x_1 - x_3) - y_1 \mod p$ onde
- se $P \neq Q$, $s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \mod p$ (soma)
- se $P = Q$, $s = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1} \mod p$ (duplica)
  - observe que s equivale à tangente da curva elíptica

Elemento neutro da curva elíptica

- Imagine um ponto $\mathcal{O}$ no infinito positivo do eixo vertical, então

  $A + \mathcal{O} = A$

- E também $A + (-A) = \mathcal{O}$ onde $-A = (x_A, p - y_A)$, $-y_A = p - y_A$

Exemplo

- Testar com $y^2 \equiv x^3 + 2x + 2 \mod 17$
- Se $P = (5, 1)$, quanto é $2P$ e $P + (2, 1)$?
- Qual é o x tal que $P = xP$?
- Qual é o Q tal que $P + Q = \mathcal{O}$

A ordem do grupo definido pela curva elíptica

- Limite de Hasse

$$p + 1 - 2\sqrt{2} \leq \#E \leq p + 1 + 2\sqrt{p}$$

- sendo $\#E$ o número estimado de elementos do grupo

Problema do logaritmo discreto em curvas elípticas

- Em uma curva elíptica E, um ponto primitivo P e outro elemento T o problema do logaritmo discreto é encontrar o inteiro $1 \leq d \leq \#E$ tal que

$$P + P + \ldots + P = dP = T$$

Problema do logaritmo discreto: exercícios

- Sendo $y^2 \equiv x^3 + 2x + 2 \mod 17$:
  - computar d tal que $dP = (16, 4)$ com $P = (5, 1)$ (computacional).
  - verificar se $d = 13$ é solução para $d(6, 2) = (3, 5)$ (decisional)

Algoritmo "duplicar e somar" para multiplicação de pontos

Algorithm 1 "Duplicar e somar" para multiplicar pontos elípticos

Require: curva elíptica E, um ponto na curva P, um escalar $d = \sum_{t=0}^{t} d_i 2^i$ com $d_i \in \{0, 1\}$ e $d_t = 1$

Ensure: $T = dP$

```
Inicializar T ← P
for i ← t − 1 ... 0 do
    T ← T + T  mod n
    if d_i = 1 then
        T ← T + P  mod n
    end if
end for
return T
```

Exercício

- Usar "duplicar e somar" em $26P = (11010_2)P = (d_4 d_3 d_2 d_1 d_0)P$

Troca de chaves de Diffie-Hellman com Curvas Elípticas (ECDHKE)

- Passo 1: escolher primo p e curva $E: y^2 \equiv x^3 + a \cdot x + b \mod p$
- Passo 2: escolher um elemento primitivo $P = (x_P, y_P)$
  - Parâmetros públicos: p, a, b, x_P, y_P
- Alice:
  - Escolher $a \in \{2, 3, \ldots, \#E - 1\}$
  - Computar e enviar $A = aP$
- Bob:
  - Escolher $b \in \{2, 3, \ldots, \#E - 1\}$
  - Computar e enviar $B = bP$
- Chave secreta: $aB = bA$ pois $a(bP) = b(aP)$
- Como y depende de x, usar somente x para obter chave AES

Questões práticas

- Possível usar $GF(2^m)$
- Segurança depende dos parâmetros da curva elíptica
- Díficil escolher bons parâmetros...
  - ... para garantir que está usando um subgrupo cíclico grande
- Padrões
  - Certicom - `http://www.secg.org/sec2-v2.pdf`
  - NIST - `http://csrc.nist.gov/groups/ST/toolkit/documents/dss/NISTReCur.pdf`
- É possível confiar nos padrões?
  - `http://crypto.stackexchange.com/questions/10263/should-we-trust-the-nist-recommended-ecc-parameters`
- Existem diversas variantes de curvas elípticas