Relações de Recorrência

Marcelo Keese Albertini
Faculdade de Computação
Universidade Federal de Uberlândia

23 de Março de 2018

Aula de hoje

Nesta aula veremos

- Conceitos de Relações de Recorrência
- Resolução de Recorrências
- Recorrências de divisão e conquista

O que são recorrências

Def. uma recorrência é uma equação que recursivamente define uma sequência.

- Recorrências modelam custos em programas

Fibonacci: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e para $N \geq 2$:

$$F_N = F_{N-1} + F_{N-2}$$

Quicksort: $0, 2, 5, 8 + 2/3, 12 + 5/6, 17 + 2/5, \ldots$

$C_0 = 0$, $N > 1$

$$C_N = N + 1 + \sum_{0 \leq k \leq N-1} \frac{1}{N}(C_k + C_{N-k-1})$$

Análise de algoritmos e resolução de recorrências: passos

1. Implementar algoritmo
2. Identificar quantidade de interesse (trocas, comparações ...)
3. Instrumentalizar algoritmo e observar sequência
4. **Propor relação de recorrência**
5. **Computar primeiros valores e comparar com observações**
6. **Resolver recorrência com uma função eficiente**
   - **Técnicas de resolução de recorrências**
7. **Verificar empiricamente a função encontrada**

Computar primeiros valores

- Usar programas recursivos: tempo exponencial

```
int fibRec(int N) {
  if (N == 0   N == 1) return N;
  return fibRec(N-1)+fibRec(N-1);
}
```

- Usar memorização: programação dinâmica – força-bruta inteligente

Exemplo: memorização para resolver Fibonacci

- Programação Dinâmica Simplificada

```
int[] memo = int[Nmax];
int fibPD(int N) {
  if (N < 2) return memo[N];

  if (memo[N] == 0) // ainda tem muita recursão
    memo[N] = fibPD(N-1) + fibPD(N-2);

  return memo[N];
}
```

Quicksort

Quais são as quantidades de interesse?

```
void quicksort(int[] a, int lo, int hi) {
  if (hi <= lo) return;

  int i = lo-1, j = hi;
  int t, v = a[hi];

  while (true)   {
    while (a[++i] < v) ;
    while (v < a[--j]) if (j == lo) break;

    if (i >= j) break;
    t = a[i]; a[i] = a[j]; a[j] = t;
  }
  t = a[i]; a[i] = a[hi]; a[hi] = t;

  quicksort(a, lo, i-1);
  quicksort(a, i+1, hi);
}
```

Resolver recorrências

- Quicksort (comparações médias): $NC_N = (N+1)C_{N-1} + 2N$
- Para obter valores para C_N:

```
c[0] = 0;
for (N = 1; N <= Nmax; N++) {
    c[N] = (N+1)*c[N-1]/N+2;
    System.out.println(c[N]);
}
```

Técnicas de resolução de recorrências: Expansão

- Analisar recorrência usando expansão para uma soma
- Objetivo: obter fórmula mais simples para sequências em função de N

Exemplo 1

$$
\begin{aligned}
\text{Com } a_0 = 0 \qquad & a_n = a_{n-1} + n \\
\text{Expandir equação para } n-1\text{:} \qquad & a_n = a_{n-2} + (n-1) + n \\
\text{Iterar:} \qquad & a_n = a_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\
\text{Iterar mais e obter soma:} \qquad & a_n = \sum_{1 \geq k \geq n} k \\
\text{Avaliar soma:} \qquad & a_n = \frac{(n+1)n}{2}
\end{aligned}
$$

Técnicas de resolução: somas elementares

Séries geométricas: $$\sum_{0\le k<n} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$$

Séries aritméticas: $$\sum_{0\le k<n} k = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

Binomial superior: $$\sum_{0\le k\le n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Teorema binomial: $$\sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

Números harmônicos: $$\sum_{1\le k\le n} \frac{1}{k} = H_n$$

Convolução de Vandermonde: $$\sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k}\binom{m}{t-k} = \binom{n+m}{t}$$

Expansão de recorrências

Exemplo 2

$$\begin{aligned}
\text{Com } a_0 = 0 \qquad & a_n = 2a_{n-1} + 2^n \\
\text{Dividir por } 2^n, \qquad & \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + 1 \\
\text{Expandir para uma soma:} \qquad & \frac{a_n}{2^n} = \sum_{1 \geq k \geq n} 1 = n \\
\text{Resolução:} \qquad & a_n = n2^n \\
\text{Verificar:} \qquad & n2^n = 2(n-1)2^{n-1} + 2^n
\end{aligned}$$

Técnicas de resolução: fator de soma

Qual é o fator da soma para $a_n = x_n a_{n-1} + \ldots$?

(AoA3ed Teorema 2.1) O fator é $x_n x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_1$. Resolver a_n dividindo a recorrência por esse fator.

Exemplo 3

Com $n > 0$ e $a_0 = 0$
$$a_n = \frac{n+1}{n} a_{n-1} + 2$$

Fator $x_n = \dfrac{n+1}{n}$:
$$\frac{n+1}{n} \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n-2} \ldots \frac{3}{2} \frac{2}{1} = n+1$$

Dividir por $n+1$:
$$\frac{a_n}{n+1} = \frac{a_{n-1}}{n} + \frac{2}{n+1}$$

Expansão:
$$\frac{a_n}{n+1} = a_0 + 2 \sum_{1 \le k \le n} \frac{1}{k+1} = 2(H_{n+1} - 1)$$

Verificar solução de Exemplo 3

- Verificar valores iniciais - fazer algumas contas
  - $a_n = (1 + \frac{1}{n})a_{n-1} + 3$ para $n > 0$ com $a_0 = 0$
    - $a_1 = 2a_0 + 2 = 2$
    - $a_2 = \frac{3}{2}a_1 + 2 = 5$
    - $a_3 = \frac{4}{3}a_2 + 2 = 26/3$
- Prova que $a_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 1)$ (indução):

$$\begin{aligned} a_n = \frac{n+1}{n}\overbrace{2n(H_n - 1)}^{a_{n-1}} + 2 &= 2(n+1)(H_n - 1) + 2 \\ &= 2(n+1)(H_n + 1/(n+1) - 1) \\ &= 2\underbrace{(n+1)(H_{n+1} - 1)}_{a_n} \end{aligned}$$

Exercício

Resolver a recorrência:

$na_n = (n-2)a_{n-1} + 2$ para $n > 1$ com $a_1 = 1$

Forma difícil:

Usar fator de soma: $\frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n-1}\frac{n-4}{n-2}\frac{n-5}{n-3}\ldots = \frac{1}{n(n-1)}$

Forma fácil:

$2a_2 = 2$ então $a_2 = 1$, portanto $a_n = 1$

Tipos de recorrências

Ordem 1	Linear:	$a_n = na_{n-1} - 1$
	Não-linear:	$a_n = 0.5(a_{n-1} + 2/a_{n-1})$
Ordem 2	Não-linear:	$a_n = a_{n-1}a_{n-2} + \sqrt{a_{n-2}}$
	Coef. variáveis:	$a_n = na_{n-1} + (n-1)a_{n-2} + 1$
Ordem t		$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-t})$
Histórico completo		$a_n = n + a_{n-1} + a_{n-2} \ldots + a_1$
Divisão e conquista		$a_n = a_{\lfloor n/2 \rfloor} + a_{\lceil n/2 \rceil} + n$

Recorrências lineares de alta ordem

(AoA Teorema 2.2) Recorrências lineares com coeficientes constantes

- Seja $a_n = x_1 a_{n-1} + x_2 a_{n-2} + \ldots x_t a_{n-t}$ para $n \geq t$
- Soluções são combinações lineares de $n^j \beta^n$ onde
- β são raízes de $q(z) = z^t - x_1 z^{t-1} - x_2 z^{t-2} - \cdots - x_t$
- $0 \leq j < v$ se raiz β tem multiplicidade v

Recorrências lineares de alta ordem: exemplo

Exemplo 4

Com $n \geq 2$ e $a_0 = 0$, $a_1 = 1$	$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$
Fazer $a_n = x^n$	$x^n = 5x^{n-1} - 6x^{n-2}$
Dividir por x^{n-2}	$x^2 - 5x + 6 = 0$
Fatorar:	$(x-2)(x-3) = 0$
Forma da solução é:	$a_n = c_0 3^n + c_1 2^n$
Usar $a_0 = 0$	$a_0 = 0 = c_0 + c_1$
Usar $a_1 = 1$	$a_1 = 1 = 3c_0 + 2c_1$
Coeficientes:	$c_0 = 1$ e $c_1 = -1$
Solução:	$a_n = 3^n - 2^n$

Recorrências lineares de alta ordem: exemplo

Sequência de Fibonacci

- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$ com $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$

- Definir que $a_n = x^n$
  - $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$
- Dividir por x^{n-2}
  - $x^2 - x - 1 = 0$
- Resolver equação quadrática $(x - \phi)(x - \phi') = 0$
  - $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
- Forma da solução deve ser: $a_n = c_0\phi^n + c_1\phi'^n$
- Usar condições iniciais para encontrar coeficientes

$$a_0 = 0 = c_0 + c_1 \qquad \text{e} \qquad a_1 = 1 = \phi c_0 + \phi' c_1$$

- Solução: $a_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\phi'^n}{\sqrt{5}}$

Exercícios

- Resolver $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$
- Resolver $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$
- Em quais condições iniciais a seguinte recorrência é constante, exponencial ou flutuante? $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ para $n > 3$
- Quais valores de a_0 e a_1 para $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $n > 1$ temos que $a_n = 2^n$? Existem condições iniciais tal que a solução é $a_n = 2^n - 1$?

Recorrências de divisão e conquista

Análise de divisão e conquista

Programas recursivos são mapeados diretamente para recorrências.

Exemplos clássicos

- Busca binária
- Mergesort
- Multiplicação de Karatsuba
- Multiplicação de matrizes de Strassen