Divisão e Conquista: análise

Marcelo Keese Albertini
Faculdade de Computação
Universidade Federal de Uberlândia

16 de Abril de 2018

Aula de hoje

Nesta aula veremos

- Recorrências de divisão e conquista
- Teorema mestre para divisão e conquista

Exemplos de recorrências de divisão e conquista

Sendo $a_{n/2} = a_{\lfloor n/2 \rfloor}$ ou $a_{n/2} = a_{\lceil n/2 \rceil}$

$a_n = a_{n/2} + 1$	$\lg n + O(1)$
$a_n = a_{n/2} + n$	$2n + O(\lg n)$
$a_n = a_{n/2} + n \lg n$	$\Theta(n \lg n)$
$a_n = 2a_{n/2} + 1$	$\Theta(n)$
$a_n = 2a_{n/2} + \lg n$	$\Theta(n)$
$a_n = 2a_{n/2} + n$	$n \log n + O(n)$
$a_n = 2a_{n/2} + n \lg n$	$\frac{1}{2} n \lg n^2 + O(n \log n)$
$a_n = 2a_{n/2} + n \lg^{\delta-1} n$	$\delta^{-1} n \lg^{\delta} n + O(n \lg^{\delta-1} n)$
$a_n = 2a_{n/2} + n^2$	$2n^2 + O(n)$
$a_n = 3a_{n/2} + n$	$\Theta(n^{\lg 3})$
$a_n = 4a_{n/2} + n$	$\Theta(n^2)$

Recorrências de Divisão e Conquista

- Muitas recorrências de DC tem a forma:
  $a(x) = \alpha a(x/\beta) + f(x)$, para $x > 1$ e $a(x) = 0$ para $x \leq 1$
- Usar x contínuo facilita tratamento de partes fracionárias
- Custo de divisão: $\alpha a(x/\beta)$
  - Divisão produz α partes, cada uma de tamanho β
- Custo de combinar: $f(x)$

Funções de DC: análise para combinar com custo $f(x) = x$

- (AoA3d) Teorema 2.5 - Seja uma função $a(x) = \alpha a(x/\beta) + f(x)$, para $f(x) = x$, $x > 1$, $a(x) = 0$ com $x \leq 1$ então

$$\text{se } \alpha < \beta \qquad a(x) \sim \frac{\beta}{\beta - \alpha} x$$

$$\text{se } \alpha = \beta \qquad a(x) \sim x \log_\beta x$$

$$\text{se } \alpha > \beta \qquad a(x) \sim \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\{\log_\beta \alpha\}} x^{\log_\beta \alpha}$$

- onde $\{\log_\beta \alpha\}$ denota a parte fracional de $\log_\beta \alpha$
- x não precisa ser inteiro

Exemplos: análise para combinar com custo x

Resolver a seguinte função de recorrência com Teorema 2.5

$a(x) = \alpha a(x/\beta) + x$, para $x > 1$, $a(x) = 0$ com $x \leq 1$

- $a(x) = 2a(x/3) + x \Rightarrow a(x) \sim 3x$
- $a(x) = 2a(x/2) + x \Rightarrow a(x) \sim x \lg x$
- $a(x) = 3a(x/2) + x \Rightarrow a(x) \sim 2.366x^{1.584}$,
  - $a(x) \sim \frac{3}{3-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{\{\log_2 3\}} x^{\log_2 3} \Rightarrow a(x) \sim 1.577x^{1.584}$
- $a(x) = a(x/4) + x$
- $a(x) = 4a(x/2) + x$
- $a(x) = 4a(x/5) + x$

Prova do Teorema 2.5: por iteração da recorrência

Iterando:

$$\begin{aligned} a(x) &= x + \alpha a(x/\beta) = x + \alpha \frac{x}{\beta} + \alpha a(x/\beta^2) \\ &= x + \alpha \frac{x}{\beta} + \alpha^2 \frac{x}{\beta^2} + \alpha^3 a(x/\beta^3) \end{aligned}$$

Após $t = \lfloor \log_\beta x \rfloor$ iterações, $a(x/\beta^t) = 0$:

$a(x) = x \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} + \cdots + \frac{\alpha^t}{\beta^t}\right)$

$$\begin{aligned} \text{Se } \alpha < \beta,\ a(x) &\sim x \sum_{j \geq 0} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^j = x \frac{\beta}{\beta - \alpha} \text{(série geométrica)} \\ \text{Se } \alpha = \beta,\ a(x) &= x \left(\lfloor 1 + \log_\beta x \rfloor\right) \sim x \log_\beta x \\ \text{Se } \alpha > \beta,\ a(x) &= x \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^t \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} + \cdots + \frac{\beta^t}{\alpha^t}\right) \sim x \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^t \end{aligned}$$

Prova do Teorema 2.5: continuação

$$\text{Como} \qquad t = \lfloor \log_\beta x \rfloor = \log_\beta x - \{\log_\beta x\}$$

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^t &= x\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\log_\beta x}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\{\log_\beta x\}} \\ &= x^{\log_\beta \alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\{\log_\beta x\}} \\ \text{Se } \alpha > \beta,\ a(x) &= \frac{\alpha}{\alpha - \beta} x^{\log_\beta \alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\{\log_\beta x\}} \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Observe que $\alpha^{\log_\beta x} = x^{\log_\beta \alpha}$

Funções de DC: análise para caso $f(n) = n^\gamma (\log n)^\delta$

(AoA3d) Teorema 2.6 - Para n inteiro, seja uma função $a(n) = \alpha a(n/\beta) + f(n)$, para $f(n) = \Theta(n^\gamma (\log n)^\delta)$, $n > 1$, $a(1) = 0$ então

$$\begin{array}{ll} \text{se } \gamma < \log_\beta \alpha & a(n) = \Theta(n^\gamma (\log n)^\delta) \\ \text{se } \gamma = \log_\beta \alpha & a(n) = \Theta(n^\gamma (\log n)^{\delta+1}) \\ \text{se } \gamma > \log_\beta \alpha & a(n) = \Theta(n^{\log_\beta \alpha}) \end{array}$$

Teorema Mestre: análise para casos mais gerais de $f(n)$

(CLRS3d) Para n inteiro, seja uma recorrência DC $a(n)$ com custo de combinar $f(n)$:

$$a(n) = \alpha a(n/\beta) + f(n)$$

(caso 1) se	$f(n) = O(n^{\log_\beta \alpha - \epsilon})$ e $\epsilon > 0$	$a(n) = \Theta(n^{\log_\beta \alpha})$
(caso 2) se	$f(n) = \Theta(n^{\log_\beta \alpha})$	$a(n) = \Theta(n^{\log_\beta \alpha} \lg n)$
(caso 3) se	$f(n) = \Omega(n^{\log_\beta \alpha + \epsilon})$ e $\epsilon > 0$	$a(n) = \Theta(f(n))$

- (Condição de Suavidade) No caso 3, é necessário que $\alpha f(n/\beta) \leq c f(n)$ com $c < 1$
- Nos casos 1 e 3, a constante $\epsilon > 0$ diz que é necessário $f(n)$ ser polinomialmente menor/maior que $n^{\log \beta \alpha}$

Exemplos de uso do Teorema Mestre

- $T(n) = 9T(n/3) + n$
- $T(n) = T(2n/3) + 1$
- $T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$
- $T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$
- $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$
- $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$
- $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$