Funções Geradoras

Marcelo Keese Albertini
Faculdade de Computação
Universidade Federal de Uberlândia

23 de Abril de 2018

Aula de hoje

Nesta aula veremos

- Funções geradoras ordinárias (FGO)

Séries Geométricas

Exemplo: $$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

Caso geral: $$a + az + az^2 + az^3 + \cdots = \sum_{k \geq 0} az^k$$

Solução para $|z| < 1$: $$\sum_{k \geq 0} az^k = \frac{a}{1 - z}$$

Funções Geradoras Ordinárias (FGO)

Definição:

$$A(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$$

é a função geradora ordinária (FGO) da sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$

- $[z^N]A(z)$ denota o N-ésimo coeficiente da sequência: a_N

sequência	FGO
$1, 1, 1, 1, \ldots$	$\sum_{N \geq 0} z^N = \frac{1}{1-z}$
$1, 1/2, 1/6, 1/24, \ldots$	$\sum_{N \geq 0} \frac{z^N}{N!} = e^z$

Operações em FGO: mudança de escala

$$\text{Se } A(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k \qquad \text{é a FGO de } a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$$

$$\text{então } A(cz) = \sum_{k\geq 0} a_k c^k z^k \qquad \text{é a FGO de } a_0, ca_1, c^2a_2, c^3a_3, \ldots$$

sequência	FGO
$1, 1, 1, 1, \ldots$	$\sum_{N\geq 0} z^N = \frac{1}{1-z}$
$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$	$\sum_{N\geq 0} 2^N z^N = \frac{1}{1-2z}$

$$[z^N]\frac{1}{1-2z} = 2^N$$

Operações em FGO: adição

Se $A(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ é a FGO de $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$

e $B(z) = \sum_{k \geq 0} b_k z^k$ é a FGO de $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$

então $A(z) + B(z)$ é a FGO de $a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots$

sequência	FGO
$1, 1, 1, 1, \ldots$	$\sum_{N \geq 0} z^N = \frac{1}{1-z}$
$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$	$\sum_{N \geq 0} 2^N z^N = \frac{1}{1-2z}$
$0, 1, 3, 7, 15, 31, \ldots$	$\frac{1}{1-2z} - \frac{1}{1-z}$

Operações em FGO: diferenciação (multiplica pelo índice)

$$\text{Se } A(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k \quad \text{é a FGO de } a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$$

$$\text{então } zA'(z) = \sum_{k\geq 1} k a_k z^k \quad \text{é a FGO de } 0, a_1, 2a_2, 3b_3, \ldots$$

$$1, 1, 1, 1, \ldots \qquad \sum_{N\geq 0} z^N = \frac{1}{1-z}$$

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots \qquad \sum_{N\geq 1} N z^N = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$0, 0, 1, 3, 6, 10, \ldots \qquad \sum_{N\geq 2} \binom{N}{2} z^N = \frac{z^2}{(1-z)^3}$$

$$0, \ldots, 1, M+1, (M+2)(M+1)/2, \ldots \qquad \frac{z^M}{(1-z)^{M+1}} = \sum_{N\geq M} \binom{N}{M} z^N$$

Operações em FGO: integral (divide pelo índice)

$$\text{Se } A(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k \qquad \text{é a FGO de } a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$$

$$\text{então } \int_0^z A(t)dt = \sum_{k \geq 1} \frac{a_{k-1}}{k} z^k \qquad \text{é a FGO de } 0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \ldots, \frac{a_{k-1}}{k}, \ldots$$

$$1, 1, 1, 1, \ldots \qquad \sum_{N \geq 0} z^N = \frac{1}{1-z}$$

$$0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots\ldots \qquad \sum_{N \geq 1} \frac{z^N}{N} = \ln \frac{1}{1-z}$$

Operações em FGO: somas parciais

Se $A(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ é a FGO de $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$

então $\frac{1}{1-z}A(z)$ é FGO de $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$

Prova: $$\frac{1}{1-z}A(z) = \sum_{k\geq 0} z^k \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

Distribuir: $$= \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 0} a_n z^{n+k}$$

Mudar de n para $n-k$ $$= \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq k} a_{n-k} z^{n}$$

Mudar ordem da soma: $$= \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{n\geq k\geq 0} a_{n-k}\Big) z^{n}$$

Mudar de $n-k$ para k: $$= \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{0\leq k\leq n} a_{k}\Big) z^{n}$$

Operações em FGO: somas parciais

Se $A(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ é a FGO de $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$

então $\frac{1}{1-z} A(z)$ é FGO de $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$

FGO	sequência
$\frac{1}{1-z} = \sum_{N \geq 0} z^N$	$1, \; 1, \; 1, \; 1, \; \ldots$
$\ln \frac{1}{1-z} = \sum_{N \geq 1} \frac{z^N}{N}$	$0, \; 1, \; 1/2, \; 1/3, \; 1/4, \ldots$
$\frac{1}{1-z} \ln \frac{1}{1-z} = \sum_{N \geq 1} H_N z^N$	$1, \; 1 + 1/2, \; 1 + 1/2 + 1/3, \; \ldots$

Operações em FGO: convolução

Se $A(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ é a FGO de $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$

e $B(z) = \sum_{k\geq 0} b_k z^k$ é a FGO de $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$

então$A(z)B(z)$ é FGO de $a_0 b_0, a_0 b_1, +a_1 b_0, \ldots, \sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k}, \ldots$

Prova $A(z)B(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k \sum_{n\geq 0} b_n z^n$

Distribuir $= \sum_{k\geq 0} \sum_{n\geq 0} a_k b_n z^{n+k}$

Mudar n para $n-k$ $= \sum_{k\geq 0} \sum_{n\geq k} a_k b_{n-k} z^n$

Troca ordem da soma $= \sum_{n\geq 0} \sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k} z^n$

Operações em FGO: convolução

Se $A(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ é a FGO de $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$

e $B(z) = \sum_{k \geq 0} b_k z^k$ é a FGO de $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$

então $A(z)B(z)$ é FGO de $a_0 b_0, a_0 b_1, +a_1 b_0, \ldots, \sum_{0 \leq k \leq n} a_k b_{n-k}, \ldots$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{N \geq 0} z^N \qquad 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots$$

$$\frac{1}{1-z}\frac{1}{1-z} = \sum_{N \geq 0} (N+1) z^N \qquad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Expansão de FGO: processo de achar coeficientes: técnicas

- Teorema de Taylor

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \frac{f''''(0)}{4!}z^4 + \dots$$

  - Exemplo: $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$
- Redução a FGO conhecida
  - Exemplo: $[z^N]\frac{1}{1-z} \to \sum_{1\leq k\leq N} \frac{1}{k} = H_N$

$\frac{1}{1-z}$ representa $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$

Integrar $\frac{1}{1-z}$ para obter $\ln \frac{1}{1-z}$ $1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ \dots$

Convolução $\frac{1}{1-z}$ com $\ln \frac{1}{1-z}$: $1,\ 1+1/2,\ 1+1/3,\ 1+1/2+1/3+1/4, \cdots$

Exercício

- Provar que $\sum_{1 \leq k \leq N} H_k = (N+1)(H_{N+1} - 1)$
  - Passo 1: Achar FGO para o lado esquerdo
  - Passo 2: Expandir FGO para achar coeficientes

Resolução de recorrências com FGO

- Procedimento
  - Fazer recorrência válida para todo $n > 0$
  - Multiplicar ambos lado por z^n e somar em n
  - Avaliar somas para obter equação que satisfaz a FGO
  - Resolve a equação para derivar uma fórmula explícita para FGO usando condições iniciais
  - Expandir a FGO para obter coeficientes

Exemplo 1: recorrência linear (Insertion Sort, melhor caso)

Resolver $\quad a_n = a_{n-1} + 1 \quad$ com $n \geq 1, a_0 = 0$

Multiplicar por z^n $\quad a_n z^n = a_{n-1} z^n + z^n$

Somar $\quad \sum_{n \geq 1} a_n z^n = \sum_{n \geq 1} a_{n-1} z^n + \frac{z}{1-z}$

Se $A(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$ $\quad A(z) = zA(z) + \frac{z}{1-z}$

Resolver $\quad A(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$

Expandir $\quad A(z) = \frac{1}{1-z} \frac{z}{(1-z)}$

Convolução de $\frac{1}{1-z}$ de um deslocamento a direita de $1, 1, 1 \ldots$ $\frac{z}{1-z}$

Portanto $\quad a_n = n$

Exemplo 2: recorrência exponencial (Torre de Hanoi)

Resolver $\quad a_n = 2a_{n-1} + 1 \qquad n \geq 1, \;\; a_0 = 1$

Multiplicar z^n $\quad a_n z^n = 2a_{n-1}z^n + z^n$

Somar $\quad \sum_{n\geq 1} a_n z^n = \sum_{n\geq 1} 2a_{n-1}z^n + \sum_{n\geq 1} z^n$

Se $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ e $a_0 = 1$ $\quad A(z) = 1 + \sum_{n\geq 1} a_n z^n$

Substituição: $\quad A(z) - 1 = 2z \sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^{n-1} + z\frac{1}{1-z}$

Como $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^{n-1}$ $\quad A(z) - 1 = 2zA(z) + \frac{z}{1-z}$

Exemplo 3: recorrências lineares alta ordem

Temos $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$	para $n \geq 2$ com $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$
Fazer válida para $n \geq 0$	$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + \delta_{n1}$
Multiplicar por z^n e somar em n	$A(z) = 5zA(z) - 6z^2A(z) + z$
Resolver	$A(z) = \dfrac{z}{1 - 5z + 6z^2}$
Usar frações parciais	$A(z) = \dfrac{c_0}{1 - 3z} + \dfrac{c_1}{1 - 2z}$
Achar coeficientes c_0 e c_1	$c_0 + c_1 = 0$
	$2c_0 + 3c_1 = -1$
Solução é	$A(z) = \dfrac{1}{1 - 3z} - \dfrac{1}{1 - 2z}$
Expandir	$a_n = 3^n - 2^n$

Ex. 4: $a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}$, $a_0 = 0, a_1 = 1$, $a_2 = 4$

P/ $n < 0$ supor $a_n = 0$

$$a_0 = 5 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$$

Fazer válida p/ $n = 1$

$$a_1 = 5a_0 - 8 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + \delta_{n,1}$$

$$a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3} + \delta_{n,1}$$

Fazer válida p/ $n = 2$

$$a_2 = 5a_1 - 8 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 - \delta_{n,2}$$

$$a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3} + \delta_{n,1} - \delta_{n,2}$$

Definição: delta de Kronecker $\delta_{n,i} = 1$ se $n = i$ e $\delta_{n,i} = 0$ se $n \neq i$

Ex. 4: $a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}$, $a_0 = 0, a_1 = 1$, $a_2 = 4$

Usar eq. válida p/ todo n $\quad a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3} + \delta_{n,1} - \delta_{n,2}$

Usar $\quad A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$

$\times$ por z^n $\quad a_n z^n = 5a_{n-1}z^n - 8a_{n-2}z^n + 4a_{n-3}z^n + \delta_{n,1}z^n - \delta_{n,2}z^n$

Somar em n $\quad A(z) = 5zA(z) - 8z^2A(z) + 4zA(z) + z - z^2$

Isolar $A(z)$ $\quad A(z) = \dfrac{z - z^2}{1 - 5z + 8z^2 - 4z^3}$

Simplificar $\quad A(z) = \dfrac{z(1-z)}{(1-z)(1-2z)^2} = \dfrac{z}{(1-2z)^2}$

Expandir $\quad a_n = n2^{n-1}$

Ex. 5: Raízes complexas $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_{n-3},\ n \geq 3$

Temos $a_0 = 1,\ a_1 = 0, a_2 = -1.$

Faz a_n válida p/ $n \geq 0$	$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_{n-3} + \delta_{n,0} - 2\delta_{n,1}$
Multiplica z^n e soma	$A(z) = 2zA(z) - z^2A(z) + 2z^3A(z) + 1 - 2z$
Resolve	$A(z) = \dfrac{1-2z}{1-2z+z^2-2z^3}$
Simplifica	$A(z) = \dfrac{1-2z}{(1-2z)(1+z^2)} = \dfrac{1}{1+z^2}$
Frações parciais	$A(z) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1-iz} + \dfrac{1}{1+iz})$
Expandir	$a_n = \dfrac{1}{2}(i^n + (-1)^n) = \dfrac{1}{2}i^n(1 + (-1)^n)$
	$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1 \ldots$

Recorrências lineares: solução geral

Em recorrências lineares com coeficientes constantes, a FGO é polinomial e temos um algoritmo.

- Solução para $a_n = x_1 a_{n-1} + x_2 a_{n-2} + \cdots + x_t a_{n-t}$, $n \geq t$, é uma combinação linear de t termos.
- As raízes do polinômio $1 - x_1 z - x_2 z^2 + \cdots - x_t z^t$

  são β_1,β_2,...,β_r onde a multiplicidade de β_i é m_i tal que

$$m_1 + m_2 + \ldots m_r = t$$

- Solução, com t termos, é

$$\sum_{0 \leq j < m_1} c_{1,j} n^j \beta_1^n + \sum_{0 \leq j < m_2} c_{2,j} n^j \beta_2^n + \cdots + \sum_{0 \leq j < m_r} c_{r,j} n^j \beta_r^n$$

as t constantes, c, são determinadas pelas condições iniciais e raízes complexas e -1 fazer comportamentos periódicos.

FGO para recorrências lineares

$$
\begin{aligned}
\text{Seja} \quad & a_n = x_1 a_{n-1} + x_2 a_{n-2} + \cdots + x_t a_{n-t} \text{ p/ } n \geq t \\
\text{A FG de } a_n \text{ é} \quad & a(z) = f(z)/g(z) \\
\text{onde} \quad & g(z) = 1 - x_1 z - x_2 z^2 - \ldots x_t z^t \\
& f(z) = g(z) \sum_{0 \leq n < t} a_n z^n \pmod{z^t}
\end{aligned}
$$

Exemplo 6: aplicação solução geral

- $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3},\ n > 2,\ a_0 = 0,\ a_1 = a_2 = 1$

Seja $t = 3$

Primeiro, escrever $g(z) = 1 - 2z - z^2 + 2z^3 = (1-z)(1+z)(1-2z)$

Segundo, usar condições iniciais a_0, a_1, a_2 em
$f(z) = g(z)\sum_{0\leq n<t} a_n z^n (\mod z^t)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z+z^2)(1-2z-z^2+2z^3) (\mod z^3) \\ &= z - z^2 = z(1-z) \end{aligned}$$

Terceiro $a(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{z}{(1+z)(1-2z)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1-2z} - \dfrac{1}{1+z}\right)$

Terminar $a_n = \dfrac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)$

Outras operações com FG

Desloca à dir.	$0, a_0, a_1, a_2, \ldots$	$zA(z) = \sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^n$
Desloca à esq.	$a_1, a_2, a_3, \ldots$	$\frac{A(z) - a_0}{z} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} z^n$
Ajustar escala	$a_0, ca_1, c^2 a_2, c^3 a_3, \ldots$	$A(cz) = \sum_{n\geq 0} c^n a_n z^n$
Diferença	$a_0, a_1 - a_0, \ldots a_n - a_{n-1}$	$(1-z)A(z) =$ $a_0 + \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n)\, z^n$

Outras FGO elementares

$$1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots \qquad e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

$$1, 0, 1, 0, \ldots \qquad \frac{1}{1-z^2} = \sum_{N\geq 0} z^{2N}$$

$$0, 0, 1, 3, 6, 10, \ldots, \binom{N}{2}, \ldots \qquad \frac{z^2}{(1-z)^3} = \sum_{N\geq 2} \binom{N}{2} z^N$$

$$1, M+1, \binom{M+2}{2}, \binom{M+3}{3}, \ldots \qquad \frac{1}{(1-z)^{M+1}} = \sum_{N\geq 0} \binom{N+M}{N} z^N$$

Resolução da recorrência do Quicksort

Com $C_0 = 0$ $$C_N = N + 1 + \frac{2}{N} \sum_{1 \le k \le N} C_{k-1}$$

Multiplicar por N $$NC_N = N(N+1) + 2 \sum_{1 \le k \le N} C_{k-1}$$

$\times$ por z^N $$\sum_{N \ge 1} NC_N z^N = \sum_{N \ge 1} N(N+1) z^N + 2 \sum_{N \ge 1} \sum_{1 \le k \le N} C_{k-1} z^N$$

1º termo $$\sum_{N \ge 1} NC_N z^N$$

2º termo $$\sum_{N \ge 1} N(N+1) z^N$$

3º termo $$2 \sum_{N \ge 1} \sum_{1 \le k \le N} C_{k-1} z^N$$

Resolução dos três termos

P/ $C(z) = \sum_{N\geq 1} C_N z^N$:

1º $\quad zC'(z) = z\left(\sum_{N\geq 1} C_N z^N\right)' = z\sum_{N\geq 1} NC_N z^{N-1} = \sum_{N\geq 1} NC_N z^N$

2º

$$z\left(\frac{1}{1-z}\right)'' = z\left(\sum_{N\geq 1} Nz^{N-1}\right)' =$$

$$z\left(\sum_{N\geq 2} N(N-1)z^{N-2}\right) = z\sum_{N\geq 1}(N+1)Nz^{N-1} =$$

$$\sum_{N\geq 1}(N+1)Nz^N = z\frac{2}{(1-z)^3}$$

Resolução dos três termos (continuação)

$$\begin{aligned}
\text{3º} \qquad & 2\sum_{N\geq 1}\sum_{1\leq k\leq N} C_{k-1}z^N \\
\text{Troca } N \text{ por } N+1 \qquad & = 2\sum_{N\geq 0}\sum_{1\leq k\leq N+1} C_{k-1}z^{N+1} \\
\text{Troca } k \text{ por } k+1 \qquad & = 2\sum_{N\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq N} C_k\right) z^{N+1} \\
\text{Tira } z \text{ das somas} \qquad & = 2z\sum_{N\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq N} C_k\right) z^{N} \\
\text{Usa definição de soma parcial} \qquad & = 2z\frac{1}{1-z}C(z)
\end{aligned}$$

Equação diferencial ordinária (EDO) do Quicksort

Usar termos e obter EDO $\quad zC'(z) = z\frac{2}{(1-z)^3} + 2z\frac{1}{1-z}C(z)$

$$C'(z) = \frac{2}{(1-z)^3} + 2\frac{C(z)}{1-z}$$

Resolução da EDO do Quicksort

Obter fator de integração com EDO Homogênea:
$\rho'(z) = 2\rho(z)/(1-z)$

$$
\begin{aligned}
\text{Fator int.} \quad & & \rho(z) &= \frac{1}{(1-z)^2} \\
\text{Da EDO} \quad & & C'(z) - 2\frac{C(z)}{1-z} &= \frac{2}{(1-z)^3} \\
\text{Usar} \quad & & f'(z)g(z) + f(z)g'(z) &= (f(z)g(z))' \\
\text{Resolver EDO} \quad & & ((1-z)^2 C(z))' = (1-z)^2 C'(z) &- 2(1-z)C(z) \\
& & = (1-z)^2 \left(C'(z) - 2\frac{C(z)}{1-z} \right) &= \frac{2}{1-z} \\
\text{Integrar} \quad & & \int (1-z)^2 C(z) dz &= \int \frac{2}{1-z} dz \\
& & C(z) &= \frac{2}{(1-z)^2} \ln \frac{1}{1-z} \\
\text{Expandir} \quad & & C_N = [z^N] \frac{2}{(1-z)^2} \ln \frac{1}{1-z} &= 2(N+1)(H_{N+1} - 1)
\end{aligned}
$$