Árvores

Marcelo Keese Albertini
Faculdade de Computação
Universidade Federal de Uberlândia

5 de Junho de 2018

Aula de hoje

Nesta aula veremos

- Árvores

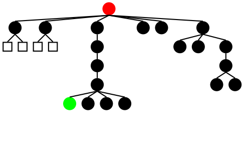
Problemas recorrentes em Análise de Algoritmos

- Contagem e medição de estruturas recursivas
  - Árvores binárias e genéricas
    - Custos médios de criar e acessar tabelas bancos de dados
    - Modelagem de algoritmos recursivos
  - Triangularização de Polígonos
    - Modelagem de meteorologia
    - Computação gráfica
  - Sequências de Padrões
    - Jogos de cartas/cassino (Ruína do apostador)
    - Caminhos, Grafos
- Ferramentas
  - Funções Geradoras para contagem e médias
  - Aproximações precisas
  - Método Simbólico

Árvores

Uma floresta com três árvores

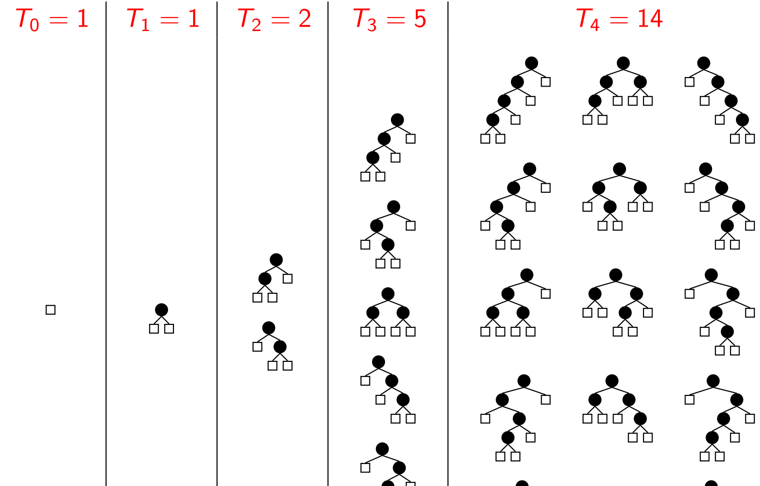
- Nó vermelho é uma raiz
- Nó verde é uma folha
- Nós quadrados são EXTERNOS: não pertencem à árvore
    - Nessa figura, somente alguns nós externos aparecem



Quantas árvores binárias tem N nós?

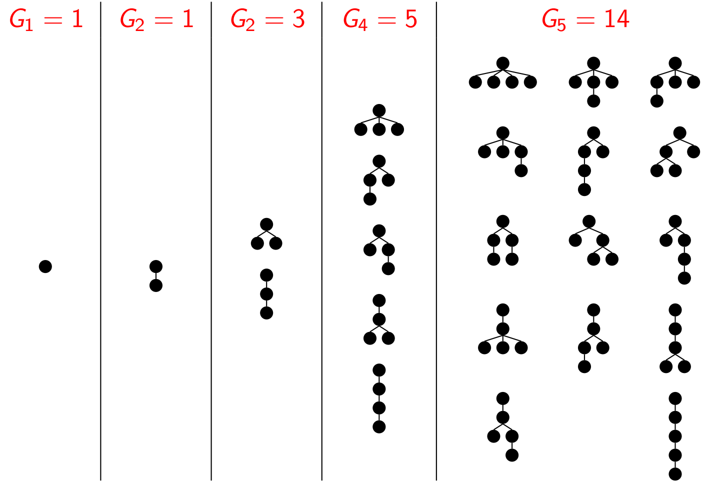
- Uma árvore binária é definida como uma raiz conectada a duas árvores binárias (possivelmente vazias)
- Uma árvore vazia é indicada por um nó externo "$\square$"

$$T_N = \{1, 1, 2, 5, 14, \dots\} \ , T_N = \sum_{0 \le k < N} T_k T_{N-1-k} + \delta_{N,0}$$



Quantas árvores têm $N+1$ nós?

$G_N = \{1, 1, 2, 5, 14, \dots\}$, $G_N = \sum_{0 \le k < N} G_k G_{N-1-k} + \delta_{N,0}$



Resolução: recorrência de Catalan

Vale p/ todo N $$T_N = \delta_{N,0} + \sum_{0 \le k < N} T_k T_{N-1-k}$$

Somar em $$T(z) \equiv \sum_{N \ge 0} T_N z^N = 1 + \sum_{N \ge 0} \sum_{0 \le k < N} T_k T_{N-1-k} z^N$$

Troca ordem na soma $$T(z) = 1 + \sum_{0 \le k < N} T_k \sum_{N \ge 0} T_{N-1-k} z^N$$

Se $i < 0$, $T_i = 0$ $$T(z) = 1 + \sum_{k \ge 0} T_k \sum_{N \ge 0} T_N z^{N+k+1}$$

$$T(z) = 1 + \sum_{k \ge 0} \sum_{N \ge 0} T_k T_N z^{N+k+1}$$

Distribuir $$T(z) = 1 + z \left(\sum_{k \ge 0} T_k z^k \right) \left(\sum_{N \ge 0} T_N z^N \right)$$

Convolução $$T(z) = 1 + zT(z)^2$$

Resolução do funcional $T(z) = 1 + zT^2(z)$

Fórmula quadrática	$zT(z) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4z})$
Usar raiz < 0	$zT(z) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4z})$
Reorganizar	$zT(z) = \frac{1}{2}(1 - (1-4z)^{1/2})$
Usar Teorema binomial	$zT(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{N\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{N} 1^{\frac{1}{2}-N}(-4z)^N\right)$
Separar $N = 0$	$zT(z) = \frac{1}{2}\left(1 - 1 - \sum_{N\geq 1}\binom{\frac{1}{2}}{N}(-4z)^N\right)$
	$zT(z) = -\frac{1}{2}\sum_{N\geq 1}\binom{\frac{1}{2}}{N}(-4z)^N$

Teorema binomial para inteiros

Sequências de coeficientes binomiais para p inteiro:

$$\begin{aligned} p &= 1 & 1, 1 \\ p &= 2 & 1, 2, 1 \\ p &= 3 & 1, 3, 3, 1 \\ p &= 4 & 1, 4, 6, 4, 1 \end{aligned}$$

Identidade binomial:

$$(x+y)^p = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} x^k y^{p-n}$$

$$\binom{p}{n} = \frac{p!}{(p-n)!n!}$$

Exemplo:

$$(x+y)^p = (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Teorema binomial para inteiros de Newton

Fórmula de (Isaac) Newton generalizada para $p \in \mathbb{R}$:

$$(x+y)^p = \sum_{n \geq 0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n y^{p-n}$$

$$\binom{p}{n} = \frac{p(p-1)\dots(p-(k-1))}{n!}$$

Exemplo:

$$\binom{-1/2}{3} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}$$

$$\sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 + \tfrac{7}{256}x^5 - \dots$$

Continuação: Resolução do funcional $T(z) = 1 + zT^2(z)$

Fórmula quadrática	$zT(z) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4z})$
Teorema binomial	$zT(z) = -\frac{1}{2}\sum_{N\geq 1}\binom{\frac{1}{2}}{N}(-4z)^N$
Extrair coeficiente	$T_N = -\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{N+1}(-4)^{N+1}$
Expansão pela definição	$= -\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\ldots(\frac{1}{2}-N)(-4)^{N+1}}{(N+1)!}$
Distribuir $(-2)^N$	$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2N-1)\cdot 2^N}{(N+1)!}$
Usar $(2/1)(4/2)(6/3)$	$= \frac{1}{N+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2N-1)}{N!}\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2N}{N!}$
	$T_N = \frac{1}{N+1}\binom{2N}{N}$

Verificar solução

- A sequência de Catalan é: $\{1, 1, 2, 5, 14, \dots\}$
- A FGO dessa sequência deve satisfazer $T(z) = 1 + zT(z)^2$
- Os primeiros termos da FGO são

$$T(z) = 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + 14z^4 + \dots$$

- Para verificar, fazer:

$$T(z) = 1{+}z{*}(1{+}z{+}2z^2{+}5z^3{+}14z^4){*}(1{+}z{+}2z^2{+}5z^3{+}14z^4)$$

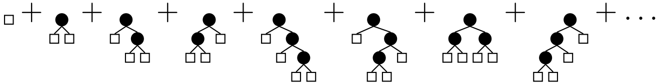
- Usando o “maxima” é possível verificar os primeiros termos:

```
f(z)=1+z*(1+z + 2*z^2 + 5*z^3 + 14*z^4)*(1+z + 2*z
    ^2 + 5*z^3+14*z^4);
ratsimp(%);
f(z) = 196 z  + 140 z  + 81 z  + 48 z  + 42 z  + 14
    z  + 5 z  + 2 z + z+ 1
```

Contagem com funções geradoras: árvores binárias

Cada termo z^N na Função Geradora corresponde a um objeto de tamanho N.
Contagem de cada árvore de tamanho $|t|$ junto com o termo $z^{|t|}$:

$$T(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^3 + z^3 + z^3 + \dots$$



Contagem com funções geradoras: definições

- Definir uma **classe** de objetos combinatoriais com uma função **size**
- Função geradora é a soma sobre todos membros da classe
- Exemplo:
  - $T \equiv$ é conjunto de árvores binárias
  - $|t| \equiv$ é número de nós internos em $t \in T$
  - $T_N \equiv$ número de $t \in T$ com $|t| = N$

$$T(z) \equiv \sum_{t \in T} z^{|t|} = \sum_{N \geq 0} T_N z^N$$

  - Decompor a partir da definição

$$\begin{aligned} T(z) = \quad & 1 + \sum_{t_l \in T} \sum_{t_r \in T} z^{|t_l|+|t_r|+1} \\ & 1 + z \sum_{t_l \in T} z^{|t_l|} \sum_{t_r \in T} z^{|t_r|} \\ & 1 + zT(z)^2 \end{aligned}$$

Valores de parâmetros: custos

- Medir custos ou propriedades de estruturas
  - Quantas folhas em uma árvore binária aleatória?
- Definir uma classe de objetos combinatoriais.
- Modelo: todos objetos de tamanho N são equiprováveis

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &\equiv && \text{conj. de todos objetos na classe} \\
|p| &\equiv && \text{tamanho de } p \in \mathcal{P} \\
P_N &\equiv && \text{número de } p \in \mathcal{P} \text{ com } |p| = N \\
custo(p) &\equiv && \text{custo associado com } p \\
P_{Nk} &\equiv && \text{número de } p \in \mathcal{P} \text{ com } |p| = N \text{ e } custo(p) = k
\end{aligned}$$

- Custo esperado de um objeto de tamanho N

$$\begin{aligned}
C_N &\equiv \sum_{k \geq 0} k \frac{P_{Nk}}{P_N} \\
\color{red}{\text{Custo acumulado}} / \color{blue}{\text{Contagem Total}} &= \frac{\sum_{k \geq 0} k P_{Nk}}{P_N}
\end{aligned}$$

Custo cumulativos

- Definir uma classe de objetos combinatoriais.
- Modelo: todos objetos de tamanho N são equiprováveis
- Função Geradoras: soma sobre todos membros da classe

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &\equiv \text{conj. de todos objetos na classe} \\
|p| &\equiv \text{tamanho de } p \in \mathcal{P} \\
P_N &\equiv \text{número de } p \in \mathcal{P} \text{ com } |p| = N \\
custo(p) &\equiv \text{custo associado com } p
\end{aligned}$$

- Funções geradoras:

Contagem Total $\qquad P(z) \equiv \sum_{p \in \mathcal{P}} z^{|p|} = \sum_{N \geq 0} P_N z^N$

Custo acumulado $\qquad C(z) \equiv \sum_{p \in \mathcal{P}} cost(p) z^{|p|} = \sum_{N \geq 0} \sum_{k \geq 0} k P_{Nk} z^N$

Custo médio $\qquad [z^N]C(z)/[z^N]P(z)$

Exemplo: núm. de bits 1 em uma string binária aleatória

- $\mathcal{B}$ é o conj. de strings binárias e $|b|$ é o número de bits em b
- $ones(b) \equiv$ número de bits 1 em b
- $B_N \equiv$ número de strings binárias de tamanho N (2^N)
- $C_N \equiv$ total de "uns" nas strings binárias de tamanho N

FG de contagem:

$$B(z) = \sum_{b \in \mathcal{B}} z^{|b|} = \sum_{N \geq 0} 2^N z^N = \frac{1}{1-2z}$$

FG acumulada:

$$\begin{aligned} C(z) = \sum_{b \in \mathcal{B}} ones(b) z^{|b|} &= \sum_{b' \in \mathcal{B}} (1 + 2ones(b')) z^{|b'|+1} \\ &= zB(z) + 2zC(z) \\ &= \frac{z}{(1-2z)^2} = \frac{1}{2} \sum_{N \geq 1} N(2z)^N \end{aligned}$$

Média de "uns":

$$\frac{[z^N]C(z)}{[z^N]B(z)} = \frac{N2^{N-1}}{2^N} = \frac{N}{2}$$

Média e Variância

- Média:

$$\mu = \sum_k k P_{Nk} / P_N$$

- Variância

$$\sigma^2 = \sum_k (k - \mu)^2 P_{Nk} / P_N = \sum_k k^2 P_{Nk} / P_N - \mu^2$$

Método simbólico: operações

- União Disjunta: $A + B$
  - Semântica: conjunto com elementos de A ou de B
  - FG: $A(z) + B(z)$
- Produto Cartesiano: $A \times B$
  - Semântica: conjunto de pares ordenados de elemento de A com um de B
  - FG: $A(z) \times B(z)$
- Sequência: $SEQ(A)$
  - Semântica: sequência (do vazio ao infinito) de elementos em A
  - FG: $\frac{1}{1-A(z)}$

Método simbólico: operações e FGs

$$A + B \qquad \sum_{\gamma \in A+B} z^{|\gamma|} = \sum_{\alpha \in A} z^{|\alpha|} + \sum_{\beta \in B} z^{|\beta|} = A(z) + B(z)$$

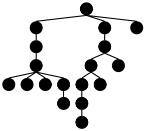
$$A \times B \qquad \sum_{\gamma \in A \times B} z^{|\gamma|} = \sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in B} z^{|\alpha| + |\beta|} = \left(\sum_{\alpha \in A} z^{|\alpha|} \right) \sum_{\beta \in B} z^{|\beta|} = A(z)B(z)$$

$$SEQ(A) \qquad SEQ(A) \equiv \epsilon + A + A^2 + A^3 + A^4 + \ldots =$$

$$1 + A(z) + A(z)^2 + A(z)^3 + \ldots = \frac{1}{1 - A(z)}$$

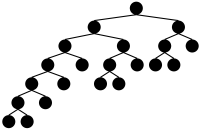
Método simbólico: qual é o número de árvores enraizadas com N nós?

- $G \equiv$ classe de todas as árvores
- Usar definição: uma árvore é um nó $\bullet$ conectado a outras árvores $SEQ(Q)$ (ordem importa)
  - $G = \bullet \times SEQ(G)$
- Obter função geradora: $G(z) = z \times \frac{1}{1-G(z)}$
- Solução do funcional:
  - $G(z) = \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2}$
- Extração do coeficiente:
  - $G_N = \frac{1}{4N-2}\binom{2N}{N}$



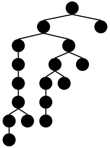
Árvore Estritamente Binária: nós têm 0 ou 2 filhos

- $T = \bullet \times SEQ_{0,2}(T)$
- $T(z) = z \times (1 + T(z)^2)$



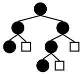
Árvore Unária-Binária: nós têm 0,1,2 filhos

- $T = \bullet \times SEQ_{0,1,2}(T)$
- $T(z) = z \times (1 + T(z) + T(z)^2)$
- Nota: quando tem apenas 1 filho, filho está no meio (não direita, nem esquerda)



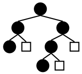
Árvore Binária com 2 tipos de nós

- Uma ABB é vazia (nó externo) ou um nó interno com 2 subárvores
- Tamanho: $|t|$: número de nós internos em t
  - Nó externo
    - Notação: $Z_\square$
    - Tamanho: $|Z_\square| = 0$
    - FG: 1
  - Nó interno
    - Notação $Z_\bullet$
    - Tamanho: $|Z_\bullet| = 1$
    - FG: z
- $T = Z_\square + T \times Z_\bullet \times T$
- $T(z) = 1 + zT(z)^2$



Árvore Binária: nós externos

- Uma ABB é vazia (nó externo) ou um nó interno com 2 subárvores
- Tamanho: $|t|$: número de nós externos em t
  - Nó externo
    - Notação: $Z_{\square}$
    - Tamanho: $|Z_{\square}| = 1$
    - FG: Z (MUDOU)
  - Nó interno
    - Notação $Z_{\bullet}$
    - Tamanho: $|Z_{\bullet}| = 0$
    - FG: 1 (MUDOU)
- $T = Z_{\square} + T \times Z_{\bullet} \times T$
- $T^{\square}(z) = z + T^{\square}(z)^2$



Florestas

- Uma floresta com N nós corresponde a uma árvore com $N + 1$ nós
  - Classe $F \equiv$ todas as florestas
  - Tamanho $|f| \equiv$ número de nós em f
- Árvores
  - Classe $T \equiv$ todas as árvores
  - Tamanho $|t|$, número de nós em t
- Átomos
  - Tipo nó: classe $\equiv z$, tamanho $\equiv 1$ e FG $\equiv z$

$$
\begin{array}{rcc}
\text{Construção} & F = SEQ(G) & G = Z \times F \\
\text{FGs} & F(z) = \dfrac{1}{1 - G(z)} & G(z) = zF(z) \\
\text{Funcional} & & F(z) - zF(z)^2 = 1 \\
\text{Coeficientes} & \multicolumn{2}{r}{F_N = T_N = \dfrac{1}{N+1}\dbinom{2N}{N} \sim \dfrac{4^N}{\sqrt{\pi N^3}}}
\end{array}
$$

Comprimento de caminhos em árvores binárias

- comprimento de caminhos internos:
  $ipl(t) = \sum_{k \geq 0} k \cdot \{\text{núm. de nós internos no nível }\}k$
- comprimento de caminhos externos:
  $xpl(t) = \sum_{k \geq 0} k \cdot \{\text{núm. de nós externos no nível }\}k$

notação	definição
t, t_L, t_R	árvores binárias: completa, dir., esq.
$\lvert t \rvert$	núm. de nós internos em t
$\boxed{t}$	núm. de nós externos em t
$ipl(t)$	comprimento de caminho interno de t
$xpl(t)$	comprimento de caminho externo de t

$$\begin{aligned}
|t| &= |t_L| + |t_R| + 1 \\
ipl(t) &= ipl(t_L) + ipl(t_R) + |t| - 1 \\
xpl(t) &= xpl(t_L) + xpl(t_R) + |t| \\
h(t) &= 1 + \max(h(t_L), h(t_R))
\end{aligned}$$

Exemplos de algoritmos em árvores

- Travessias: préordem, em-ordem, pósordem
- Árvores Binárias de Busca: dicionários, tabela de símbolos, array associativo e busca
  - Operações: construção e recuperação
  - Custo de construção: proporcional ao caminho percorrido para encontrar a posição correta

Custo de construção de ABBs

- Custo de construção: proporcional ao caminho percorrido para encontrar a posição correta
  - Pior caso: $T_N = T_{N-1} + N = N(N-1)/2$
  - Melhor Caso: $T_N = 2T_{N/2} + N$
  - Custo proporcional ao comprimento dos caminhos internos (árvore estática)
- Opção 1: computar soma total dos comprimentos das árvores construídas com todas $N!$ permutações e dividir total por $N!$
- Opção 2: somar, para cada árvore, o produto do comprimento do caminhos internos e o número de permutações que levam à árvore sendo construída

Árvores Binárias Aleatórias (ABA) vs. Árvores Binárias de Busca (ABB)

- ABA (Árvores de Catalão) tem árvores equiprováveis de serem sorteadas
  - Chance de uma ABA com N nós ser sorteada depende de $\binom{2N}{N}/(N+1)$
- ABB tem árvores mais balanceadas mais prováveis
  - Chance de uma ABB com N nós ser sorteada depende da chance de uma permutação produzir tal árvore

Comprimento de caminhos em ABA

$$Q_{Nk} \equiv \text{número de árvores com } N \text{ nós e } ipl = k$$

$$T_N \equiv \text{número de ABAs}$$

$$Q_N \equiv \text{custo acumulado de } ipl\text{, o caminho interno total)}$$

Contagem $\quad T(z) = 1 + zT(z)^2 = \sum_{N \geq 0} \frac{1}{N+1}\binom{2N}{N} z^N \sim \frac{4^N}{\sqrt{\pi N^3}}$

FG acumulada $\quad Q(z) = \sum_{t \in T} ipl(t) z^{|t|}$

ipl médio $\quad \frac{[z^N]Q(z)}{[z^N]T(z)} = \frac{[z^N]Q(z)}{T_N}$

FG acumulada para *ipl* em ABAs

FG de contagem $$T(z) = \sum_{t \in T} z^{|t|}$$

Cumulativa $$Q(z) = \sum_{t \in T} ipl(t) z^{|t|}$$

Tamanho de caminhos $$ipl(t) = ipl(t_L) + ipl(t_R) + |t_L| + |t_R|$$

$$\sum_{t_L \in T} ipl(t_L) z^{|t_L|} \sum_{t_R \in T} z^{|t_R|} = Q(z)T(z)$$

$$\sum_{t_L \in T} |t_L| z^{|t_L|} \sum_{t_R \in T} z^{|t_R|} = zT'(z)T(z)$$

$$Q(z) = 1 + \sum_{t_L \in T} \sum_{t_R \in T} (ipl(t_L) + ipl(t_R) + |t_L| + |t_R|) z^{|t_L| + |t_R| + 1}$$

$$\boxed{Q(z) = 1 + 2zQ(z)T(z) + 2z^2 T'(z)T(z)}$$

FG acumulada para *ipl* em ABAs

$$T(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} \qquad T_N \sim \frac{4^N}{N\sqrt{\pi N}}$$

$$T'(z) = -\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z^2} + \frac{1}{z\sqrt{1-4z}} \qquad 1 - 2zT(z) = \sqrt{1-4z}$$

Funcional

$$Q(z) = \frac{2z^2 T(z) T'(z)}{1-2zT(z)}$$

$$zQ(z) = \frac{z}{1-4z} - \frac{1-z}{\sqrt{1-4z}} + 1$$

Só coef. mais signif.

$$Q_N \equiv [z^N]Q(z) \sim 4^N$$

ipl médio

$$\boxed{Q_N/T_N \sim N\sqrt{\pi N}}$$

Altura média para ABAs

- $T(z)$: FG de ABAs
- $\mathcal{T}_h \equiv$ classe das ABA's com altura até h

$$T^{[h]}(z) = \sum_{t \in \mathcal{T}_h} z^{|t|}$$

- Método simbólico: $\mathcal{T}_{h+1} = \square + \bullet \times \mathcal{T}_h \times \mathcal{T}_h$
- $T^{[h+1]}(z) = 1 + zT^{[h]}(z)^2$
- $T^{[\infty]}(z) = 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + 14z^4 + 42z^5 + 132z^6 + \cdots = T(z)$
- Custo acumulado:

$$[z^N] \sum_{h \geq 0} (T(z) - T^{[h]}(z))$$

- Altura média: $2\sqrt{\pi N} + O(N^{1/4+\epsilon})$

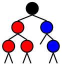
  com $\epsilon > 0$

Árvores de Busca Binária

- Sequência de inserções de elementos de uma permutação definem a ABB
- Árvores com alturas menores são mais prováveis

Mapeamento de permutação a ABB usando inserções

- Quantas permutações resultam no seguinte formato de árvore ao inserir em uma ABB vazia? 

  Duas: [2, 1, 3] e [2, 3, 1]
- Quantas permutações mapeiam para a árvore  ?

Raiz deve ser 4.

[1,2,3] ficam à esq. e [5,6] à dir.

$\binom{5}{3}$ modos de intercalar esq. e dir.

2 permutações possíveis à esquerda

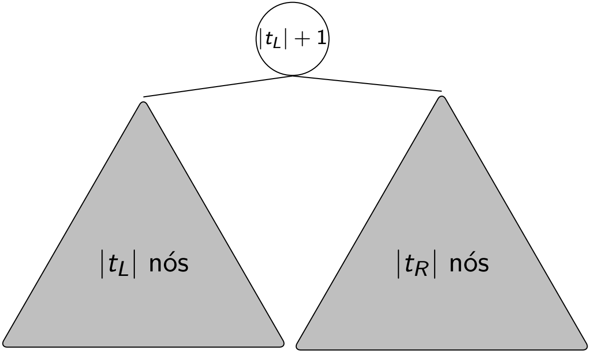
1 permutação possível à direita

Total: $\boxed{\binom{5}{3} \cdot 2 \cdot 1 = 20}$

4 2 1 3 5 6	4 2 3 1 5 6
4 2 1 5 3 6	4 2 3 5 1 6
4 2 1 5 6 3	4 2 3 5 6 1
4 2 5 1 3 6	4 2 5 3 1 6
4 2 5 1 6 3	4 2 5 3 6 1
4 2 5 6 1 3	4 2 5 6 3 1
4 5 2 1 3 6	4 5 2 3 1 6
4 5 2 1 6 3	4 5 2 3 6 1
4 5 2 6 1 3	4 5 2 6 3 1
4 5 6 2 1 3	4 5 6 2 3 1

Mapeamento de permutação a ABB usando inserções

- Quantas permutações mapeiam para uma ABB genérica t?



- Raiz é o $|t_L| + 1$-ésimo elemento
- P_t é o número de permutações para mapear a t

$$\boxed{P_t = \binom{|t_L| + |t_R|}{|t_L|} \cdot P_L \cdot P_R}$$

Qual *ipl* médio para ABBs

- $C_{Nk} \equiv$ número de permutações resultantes em uma ABB com N nós e $ipl = k$
- $N! \equiv$ número de permutações
- $C_N \equiv$ custo acumulado (ipl total)

- $P \equiv$ conjunto de todas permutações
- $|p| \equiv$ comprimento da permutação p
- $ipl(p)$ é o *ipl* da ABB construída com p inserida em árvore vazia
- $P_N \equiv$ número de permutações de tamanho N ($N!$)
- C_N é o total *ipl* de ABBs construídas a partir de todas as permutações

Função Geradora Exponencial

Notação FGE	$A(z) = \sum_{k \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$
Coeficiente de uma FGE	$n![z^n]A(z)$
1,1,1,1,1 ...	$e^z = \sum_{N \geq 0} \frac{z^N}{N!}$
0,1,2,3,4, ...	$ze^z = \sum_{N \geq 1} \frac{z^N}{(N-1)!}$
1,1,2,6,24, ..., $N!$	$\frac{1}{1-z} = \sum_{N \geq 0} \frac{N!z^N}{N!}$

Qual *ipl* médio para ABBs?

FGE que conta permutações $$P(z) = \sum_{p \in P} \frac{z^{|p|}}{|p|!} = \sum_{N \geq 0} N! \frac{z^N}{N!} = \frac{1}{1-z}$$

FGE acumulativa de ipl $$C(z) = \sum_{p \in P} ipl(p) \frac{z^{|p|}}{|p|!}$$

ipl médio ABB aleatória $$\frac{N![z^N]C(z)}{[z^N]P(z)} = \frac{N![z^N]C(z)}{N!} = [z^N]C(z)$$

- Queremos obter $\boxed{[z^N]C(z)}$

Qual *ipl* médio para ABBs? Obter FGE acumulativa

$$P(z) = \frac{1}{1-z} \qquad P'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \qquad C(z) = \sum_{p \in P} ipl(p) \frac{z^{|p|}}{|p|!}$$

Decompor $C(z) =$

$$\sum_{p_L \in P} \sum_{p_R \in P} \binom{|p_L| + |p_R|}{|p_L|} \frac{z^{|p_L|+|p_R|+1}}{(|p_L| + |p_R| + 1)!} (ipl(p_L + ipl(p_R) + |p_L| + |p_R|)$$

Diferenciar:

$$C'(z) = \sum_{p_L \in P} \sum_{p_R \in P} \frac{z^{|p_L|}}{|p_L|!} \frac{z^{|p_R|}}{|p_R|!} (ipl(p_L) + ipl(p_R) + |p_L| + |p_R|)$$

$$= 2C(z)P(z) + 2zP'(z)P(z) = \boxed{\frac{2C(z)}{1-z} + \frac{2z}{(1-z)^3}} \approx \text{EDO do quicksort}$$

$$\boxed{[z^N]C(z) = C_N = 2(N+1)(H_{N+1} - 1) - 2N}$$

Relação do Quicksort com BST

- $xpl(t) = ipl(t) + 2|t|$
- $xpl(t) = 2(N+1)(H_{N+1} - 1) - 2N + 2N$
- $xpl(t)$ tem a mesma equação com o custo do quicksort em permutação aleatória

Altura média ABB

- ipl médio é $2(N+1)(H_{N+1}-1)-2N \sim 2N \ln N$
- $ipl(t) \geq |t|h(t)$
- $h(t) \leq \sqrt{2ipl(t)}+1$
- altura média está entre $\ln N$ e $\sqrt{4N \ln N}+1 = 2\sqrt{N \ln N}+1$
- Seja $q_N^{[h]}$ a probabilidade que uma ABB com N nós tenha altura menor que h
  - $$q_N^{[h]} = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq k \leq N} q_{k-1}^{[h-1]} q_{N-1-k}^{[h-1]}$$
  - $\frac{d}{dz} q^{[h]}(z) = (q^{[h-1]}(z))^2$