Programação dinâmica

Marcelo Keese Albertini
Universidade Federal de Uberlândia

25 de Junho de 2019

Aula de hoje

Nesta aula veremos:

- Recursividade
- Programação Dinâmica

Recursividade

Definição 1

A definição de recursividade pode ser encontrada na Definição 1 deste slide.

Resolução de problemas em partes

Divisão de um problema maior, em sucessivas partes menores e igualmente estruturadas, até chegar na menor parte de todas, cuja resposta é indivisível e trivial.

Recursividade

Sistemática

- uma função recursiva chama ela mesma, com valores de parâmetros diferentes

Memória

- cada nova chamada de função mais memória para as novas variáveis locais

Exemplo: fatorial

Naturalmente recursivo

fatorial(5) = 5 * fatorial(4)

```
1 int fatorial(n) {
2   if (n > 1) {
3     return n*fatorial(n-1);
4   } else {
5     return 1;
6   }
7 }
```

Em uma solução recursiva definir:

- caso base: solução trivial
- regra de recorrência

Recursão indireta

Quando uma função f(x), chama g(x) que chama f(x), ou seja, f(g(f(x))).

```
1  void f(int a) {
2       if (a < 20) {
3            a++;
4            g(a)
5       }
6       printf("a = %d", a);
7  }
8
9  void g(int b) {
10      if (b < 20) {
11           b = b + 2;
12           f(b)
13      }
14      printf("b = %d",b);
15 }
```

Execução:

```
1  f(10)
2    g(11)
3    f(13)
4      g(14)
5      f(16)
6        g(17)
7        f(19)
8          g(20)
9          b = 20
10       a = 19
11       b = 17
12     a = 16
13     b = 14
14 ...
```

Criação de coelhos de Fibonacci

1. um novo coelho na gaiola

Criação de coelhos de Fibonacci

1. um novo coelho na gaiola
2. uma nova coelha na gaiola

Criação de coelhos de Fibonacci

1. um novo coelho na gaiola
2. uma nova coelha na gaiola
3. 2 coelhos fazem um novo coelho, 3 ao todo

Criação de coelhos de Fibonacci

1. um novo coelho na gaiola
2. uma nova coelha na gaiola
3. 2 coelhos fazem um novo coelho, 3 ao todo
4. 3 coelhos fazem 2 novos coelhos, 5 ao todo

Criação de coelhos de Fibonacci

1. um novo coelho na gaiola
2. uma nova coelha na gaiola
3. 2 coelhos fazem um novo coelho, 3 ao todo
4. 3 coelhos fazem 2 novos coelhos, 5 ao todo
5. 5 coelhos fazem 3 novos, 8 ..., geração n=5

Criação de coelhos de Fibonacci

1. um novo coelho na gaiola
2. uma nova coelha na gaiola
3. 2 coelhos fazem um novo coelho, 3 ao todo
4. 3 coelhos fazem 2 novos coelhos, 5 ao todo
5. 5 coelhos fazem 3 novos, 8 ..., geração n=5
6. 8 fazem mais 5, 13... ($t_6 = 8$), n=6

Criação de coelhos de Fibonacci

1. um novo coelho na gaiola
2. uma nova coelha na gaiola
3. 2 coelhos fazem um novo coelho, 3 ao todo
4. 3 coelhos fazem 2 novos coelhos, 5 ao todo
5. 5 coelhos fazem 3 novos, 8 ..., geração n=5
6. 8 fazem mais 5, 13... ($t_6 = 8$), n=6
7. 13 mais 8, 21 ($t_7 = 13$), n=7

Criação de coelhos de Fibonacci

1. um novo coelho na gaiola
2. uma nova coelha na gaiola
3. 2 coelhos fazem um novo coelho, 3 ao todo
4. 3 coelhos fazem 2 novos coelhos, 5 ao todo
5. 5 coelhos fazem 3 novos, 8 ..., geração n=5
6. 8 fazem mais 5, 13... ($t_6 = 8$), n=6
7. 13 mais 8, 21 ($t_7 = 13$), n=7
8. $21 = t_7 + t_6$, n = 8

Criação de coelhos de Fibonacci

1. um novo coelho na gaiola
2. uma nova coelha na gaiola
3. 2 coelhos fazem um novo coelho, 3 ao todo
4. 3 coelhos fazem 2 novos coelhos, 5 ao todo
5. 5 coelhos fazem 3 novos, 8 ..., geração n=5
6. 8 fazem mais 5, 13... ($t_6 = 8$), n=6
7. 13 mais 8, 21 ($t_7 = 13$), n=7
8. $21 = t_7 + t_6$, n = 8

Criação de coelhos de Fibonacci

1. um novo coelho na gaiola
2. uma nova coelha na gaiola
3. 2 coelhos fazem um novo coelho, 3 ao todo
4. 3 coelhos fazem 2 novos coelhos, 5 ao todo
5. 5 coelhos fazem 3 novos, 8 ..., geração n=5
6. 8 fazem mais 5, 13... ($t_6 = 8$), n=6
7. 13 mais 8, 21 ($t_7 = 13$), n=7
8. $21 = t_7 + t_6$, n = 8

Regra de recorrência

O número de coelhos da geração atual depende do número de coelhos das duas gerações anteriores.

$t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$

Coelhos

```
1  /* Entrada: numero inteiro representando a geracao
2   *          que queremos saber a quantidade de coelhos
3   *
4   * Saida: numero de coelhos na geracao desejada
5   */
6  int contaCoelhos(int geracao) {
7    if (geracao == 1 || geracao == 2) {
8      return geracao;
9    } else {
10     int coelhosGen1 = contaCoelhos(geracao-1);
11     int coelhosGen2 = contaCoelhos(geracao-2);
12     return coelhosGen1 + coelhosGen2;
13   }
14 }
```

Busca de grupos de amigos

```
1 class Pessoa {
2   int grupo;
3   Pessoa[] amigos;
4 }
```

- Temos uma rede social
- Atribuimos código de grupos para as pessoas amigas
- Como medir o tamanho de grupos?

Grupos de amigos

```
1  /* Método de um tipo "Pessoa".
2  * Entrada: informações disponíveis da própria Pessoa
       this
3  * Saída: número de pessoas que contituem o grupo em que
       a pessoa está conectada
4  */
5  int medirGrupo() {
6    int tam = 0;
7
8    if (this.grupo == -1) {
9      tam = 1;
10     this.grupo = 1;
11
12     for (int i = 0; i < this.amigos.length; i++) {
13       tam = tam + this.amigos[i].medirGrupo();
14     }
15   }
16
17   return(tam);
18 }
```

Recursão

- Alguns problemas são mais fáceis de resolver com recursividade
- É necessário cuidado para evitar uma pilha de recursão grande

Definição: pilha de recursão

Pilha de recursão é a sequência de chamadas de função para realizar a recursividade. Uma chamada pode envolver o uso de bastante memória.

- O cálculo do número de coelhos de certas gerações é repetido diversas vezes
  - possível evitar o re-cálculo por meio do armazenamento de soluções em tabelas
  - base de Programação Dinâmica

Programação dinâmica: motivação

Recursão Fibonacci: $\{1, 2, 3, 5, 8, 13\}$

$$f(6) = f(5) + f(4)$$
$$f(6) = (f(4) + f(3)) + (f(3) + f(2))$$
$$f(6) = ((f(3) + f(2)) + (f(2) + f(1))) + (f(2) + f(1) + 2)$$
$$f(6) = (((f(2) + f(1)) + 2) + (2 + 1)) + (2 + 1 + 2)$$
$$f(6) = (((2 + 1) + 2) + (2 + 1)) + (2 + 1 + 2)$$
$$f(6) = 13$$

Repetição de cálculos

Várias recursões podem ser evitadas: $f(4)$ é refeita 2 vezes, $f(3)$ refeita 3 vezes, $f(2)$ é refeita 5 vezes.

Programação dinâmica: memorização

Princípio

Em um problema de programação dinâmica, as soluções de instâncias dos problemas maiores são compostas a partir de soluções de instâncias menores.

Programação dinâmica

programação no sentido de planejamento (*programar as férias*). *dinâmica* porque ocorre em uma sequência.

Como fazer?

Cada vez que uma solução é encontrada, guardar em uma tabela.

Programação dinâmica 1: Fibonacci

```
 1 int[] sols = new int[0];
 2 int fibonacci(int n) {
 3   if (n<=1) return 1;
 4   if (n==2) return 2;
 5   if (sols.length <= n) {
 6     sols = new int[2*n+1];
 7     sols[0] = sols[1] = 1 ;
 8   }
 9   return fibrec(n);
10 }
11 int fibrec(int n) {
12   if (n>0) {
13     if (sols[n] > 0) return(sols[n]);// usa memória
14     else {
15       sols[n-1] = fibrec(n-1); // guarda
16       sols[n-2] = fibrec(n-2); // na memória
17       return(sols[n-1]+sols[n-2]);
18     }
19  } else return 1;
20 }
```

Programação dinâmica 2: Fibonacci

```
1  int fibonacci(int n) {
2    int[] f = new int[n];
3
4    // Condições iniciais
5    f[0] = 1;
6    f[1] = 2;
7
8    // Programação dinâmica
9    for (int i = 2; i < n; i++) {
10       f[i] = f[i-1] + f[i-2];
11   }
12
13   return f[n-1];
14 }
```

Programação dinâmica: eficiência

Estratégia será eficiente se

número de subproblemas resolvidos (ou seja, não consultados da tabela) for pequeno.

Pequeno se o tamanho da instância for n e o número de subproblemas resolvidos for uma função polinomial de n, com grau até 3.

Uso de espaço

Temos que armazenar soluções passadas

Programação dinâmica: problemas

Cada problema pode ter uma formulação diferente para a solução com programação dinâmica

Alguns problemas

- Multiplicação de cadeia de matrizes
- Problema da mochila
- Distância de edição entre strings
- Máxima subcadeia comum

Programação dinâmica (Cormen et al.)

- Subestrutura ótima: a solução ótima para o problema contém suas subsoluções i.e., soluções ótimas para os subproblemas
- Subsoluções sobrepostas: essas subsoluções podem ser recomputadas repetidamente quando o algoritmo é de força-bruta

Usando Programação Dinâmica

- Passo 1: Estudar problema e identificar subproblemas
- Passo 2: Montar recorrência que usa a solução pronta dos subproblemas
- Passo 3: Escrever algoritmos
  - Versão 1: Recursão top-down
  - Versão 2: Recursão top-down com memos
  - Versão 3: Procedimento não-recursivo bottom-up com memos
- Passo 4: Análise de custo

Análise de algoritmos de PD

- Análise:
  - Contar número de subproblemas: N
  - Custo por subproblema: M é custo de combinar soluções em tabela na solução do subproblema atual
  - Custo total: $M \times N$
- Se subproblemas puderem ser organizados sequencialmente:
  - Se subproblemas são sufixos a partir da i-ésima parte, então são $\Theta(N)$ subproblemas
  - Se subproblemas são prefixos antes da j-ésima parte, então são $\Theta(N)$ subproblemas
  - Se subproblemas são substrings entre i e j, então são $\Theta(N^2)$ subproblemas

Exemplo: problema do troco – Passo 1: estudar problema

De quantas maneiras diferentes posso dar um troco de valor N?

- Entrada: troco esperado N e valores de moedas disponíveis $S[]$
- Saída: número de maneiras diferentes de formar o troco pedido.

Ideia

- Dividir número de soluções em 2 partes
  - Contar número de soluções com a moeda i
  - Contar número de soluções sem a moeda i

Exemplo: problema do troco – Passo 2: montar recorrência

Recorrência

A função $contar(S, m, N)$ obtém o número de maneiras de formar o troco N com as m primeiras moedas disponíveis em S.

- Se usar a moeda atual, então a sub-contagem será $contar(S, m, N - S[atual])$
- Se não usar a moeda atual, então a sub-contagem será $contar(S, m - 1, N)$
- Portanto a contagem deve ser

$$contar(S, m, N) = contar(S, m, N - m[atual]) + contar(S, m - 1, N)$$

Exemplo: troco – Passo 3: recursão top-down

```
1  /*
2  Entrada: S: array com valores de moedas em centavos,
3           m: número de valores de moedas disponíveis,
4           N: valor em centavos do troco a ser formado.
5
6  Saída: número de maneiras de formar o troco.
7  */
8  int contar(int[] S, int m, int N){
9    if (N == 0)// troco foi formado
10     return 1;
11   if (N < 0) // não é possível usar essas moedas
12     return 0;
13   if (m <= 0 && N >= 1) // acabaram os valores
14     return 0;
15
16   return contar(S, m-1, N) + contar(S, m, N-S[m-1]);
17 }
```

Exemplo: troco – Passo 3: recursão com memos

```
1  /* Entrada: S: array com valores de moedas em centavos,
2              m: número de valores de moedas disponíveis,
3              N: valor em centavos do troco a ser formado.
4              memo: new int[N+1][m];
5  Saída: número de maneiras de formar o troco.*/
6  int contar(int[] S, int m, int N){
7    if (N == 0)// troco foi formado
8      return 1;
9    if (N < 0) // não é possível usar essas moedas
10     return 0;
11   if (m <= 0 && N >= 1) // acabaram os valores
12     return 0;
13     if (memo[N][m] == 0)
14       memo[N][m] = contar(S, m-1, N)
15                  + contar(S, m, N-S[m-1]);
16       return memo[N][m];
17 }
```

Exemplo: troco – Passo 3: bottom-up

```
1  int contar(int S[], int m, int N) {
2    int memo[N+1][m]; // tabela de subproblemas
3    // inicializar para troco formado: n = 0
4    for (int i=0; i < m; i++) memo[0][i] = 1;
5    for (valor = 1; valor < N+1; valor++) {
6      for (int moeda_i = 0; moeda < m; moeda++) {
7        int com_i = 0;// contar incluindo moeda i
8        if (valor - S[moeda_i] >= 0)
9          com_i = memo[valor -S[moeda_i]][moeda_i];
10
11       int sem_i = 0;// contar excluindo moeda_i
12       if (moeda_i >= 1) sem_i = memo[valor][moeda_i-1];
13
14       memo[i][j] = com_i + sem_i;
15     }
16   }
17   return memo[N][m-1];
18 }
```

Exemplo: troco – Passo 4: análise

- Loop inicialização (linha 4): m memos
- Loops resolução (linhas 5 e 6): $N \times m$ memos (linha 14)
- Se $m = \Theta(N)$, então custo total é $\Theta(N^2)$

Exemplo: corte de barras – Passo 1: estudar problema

- Como achar sequência de cortes de uma barra para maximizar lucro

tam(cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valor P_i	1	5	8	9	10	17	17	20	24

- P_i é preço do corte do tamanho i e P_N da barra inteira
- Cortes $N = C_1 + C_2 + \ldots C_K$ correspondem ao lucro

$$L_N = P_{C_1} + P_{C_2} + \cdots + P_{C_K}$$

- Objetivo é maximizar L_N

Exemplo: corte de barras – Passo 2: montar recursão

- Objetivo é maximizar

$$L_N = \max(P_N, L_1 + L_{N-1}, L_2 + L_{N-2}, \ldots, L_{N-1} + L_1)$$

- Recorrência usando sequência de subproblemas do tipo sufixo
  - $L_i + L_{N-i}$ é lucro de fazer venda em 2 partes independentes
- Recorrência é:

$$L_N = \max_{1 \leq i \leq N} (P_i + L_{N-i})$$

Exemplo: corte de barras – Passo 3: recursão

```
1 corte(P, N)
2   if (N == 0) return 0
3   L = - inf
4   for (i in 1...N) {
5     L = max(L,P[i]+corte(p,N-i))
6 }
```

Exemplo: corte de barras – Passo 3: Recursão com memos

```
1  corte(P, N)
2      if (memo[N] >= 0) return memo[N]
3       if (N==0) L = 0;
4       else {
5          L = -inf
6          for (i in 1:N){
7             L = max(L, P[i]+corte(P,N-i,memo));
8          }
9          memo[N] = L;
10      }
11      return L;
12 }
```

Exemplo: corte de barras – Passo 3: bottom-up

```
1  corte(P, N)
2      memo[0 ... N] = -inf
3      memo[0] = 0
4      for (j = 1; j <= N; j++) { // número de
           subproblemas
5        L = -inf
6        for (i = 1; i <= j; i++) {// resolver subproblema
7          L = max(L, P[i] + memo[j-i])
8        }
9        memo[j] = L
10     }
11     return memo[N]
12   }
```

Exemplo: corte de barras – Passo 4: Análise

- Como sequência de subproblemas é usando sufixos, tem-se $\Theta(N)$ subproblemas
- A resolução de um subproblema (linha 6) usa $\Theta(N)$ consultas a subproblemas anteriores
- Custo total: $\Theta(N^2)$
- Mais precisamente: $\sum_{j=1}^{N} j$

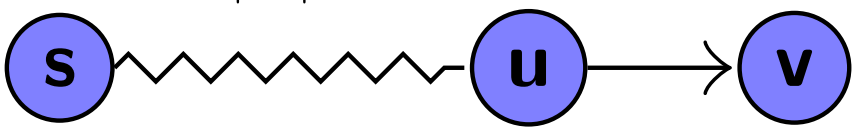
Problema: Justificação de textos

$$badness(i, j) = (\text{tam. pág} - \text{tam. da linha usando words}[i : j])^3$$

- $words[i : j]$ indica linha usando palavras de i a j
- 1) definir subproblemas: sufixo do texto atual quebrado antes de i: $words[i :]$
- 2) opções: lugares onde quebrar as palavras words para começar novas linha
  - "se temos n palavras e quebramos na i-ésima" são $n - i$ opções, no máximo
- 3) Recorrência: $J(i) = \min\{J(j) + badness(i, j)\}$ para $\forall j \in [i + 1, n + 1]$
- 4) Solução do problema original: usar ponteiros-pai para "lembrar da melhor escolha" para construir a solução:
  - $pai[i] = \arg\min(\dots) = j$
  - $0 \to pai[0] \to pai[pai[0]] \to \dots$
  - Reconstrução da solução em tempo linear

Problema: Menor Caminho

- Problema: menor caminho entre s e t
- $\delta_k(s, v)$, $s, v \in V$, usando $O \leq K < |V|$ passos
- Subproblema: achar menor caminho entre qualquer s e v usando k arestas“
- Número de subproblemas: $|V|^2$ usando todo $v \in V$ e $0 \leq k < |V|$



onde u pode ser cada um dos vértices chegando a v

- Montar Recursão

$$\delta_k(s, v) = \min \{\delta_{k-1}(s, v) | (u, v) \in E\} + peso(u, v)$$

- Extrair resposta usando “ponteiros-pai” para indicar de onde veio
- Análise: número de opções para cada recursão é $\sum_{v \in V} indegree(v) = 2|E|$
- Resolução por sufixos em u: $\Theta(N)$ problemas

Problema: Parentização de Matrizes

- Encontrar melhor ordem para multiplicar $A_0 \times A_1 \times A_2 \times \ldots A_{N-1}$
- Escolha: qual é a última multiplicação

$$(A_0 \ldots A_{k-1}) \times (A_k \ldots A_{N-1})$$

- Subproblema: parentização de $A_i \ldots A_{j-1}$
- Número de subproblemas é $\Theta(N^2)$
- Número de escolhas da multiplicação: $(A_i \ldots A_{k-1}) \times \left(A_k \dot{A}_{j-1}\right)$, $j - i + 1 = O(N)$
- $DP(i,j) =$ $\min_{k \in [i+1,j]} (DP(i,k) + DP(k,j) +$ custo de $A_{1:k} \times A_{k:j})$
  - custo de $\Theta(N)$ para resolver cada subproblema
- Custo total é $\Theta(N) \times \Theta(N^2) = \Theta(N^3)$
- Ordem de resolução: crescendo substring

Problema: distância de edição

- A distância de edição entre strings s_1 e s_2 é o número mínimo de operações básicas para transformar s_1 em s_2
- Distância de Levenshtein: operações básicas são inserção, remoção e substituição
- distância de *doa-do*: 1
- distância de *caro-carro*: 1
- distância de *pato-pata*: 1
- distância de *vôa-avô*: 2
- Resolução PD: subproblemas do tipo sufixos na dimensão de s_1 e em s_2

Distância de Levenshtein

distanciaLevenshtein(s_1, s_2)

```
 1  for i ← 0 to |s1|
 2  do m[i, 0] = i
 3  for j ← 0 to |s2|
 4  do m[0, j] = j
 5  for i ← 1 to |s1|
 6  do for j ← 1 to |s2|
 7       do if s1[i] = s2[j]
 8            then m[i, j] = min{m[i-1, j]+1, m[i, j-1]+1, m[i-1, j-1]}
 9            else  m[i, j] = min{m[i-1, j]+1, m[i, j-1]+1, m[i-1, j-1]+1}
10  return m[|s1|, |s2|]
```

Operações: inserir (custo 1), remoção (custo 1), substituir (custo 1), cópia (custo 0)

Distância de Levenshtein

			f		a		s		t	
		0	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**
c		**1** **1**	*1* *2*	*2* *1*	**2** **2**	3 **2**	**3** **3**	4 **3**	**4** **4**	5 **4**
a		**2** **2**	**2** 3	**2** **2**	*1* *3*	*3* *1*	*3* *2*	*4* *2*	4 **3**	5 **3**
t		**3** **3**	**3** 4	**3** **3**	3 4	**2** **2**	*2* *3*	*3* *2*	*2* *3*	*4* *2*
s		**4** **4**	**4** 5	**4** **4**	4 5	**3** **3**	**2** 4	3 **2**	*3* *3*	*3* *3*

Cada célula da matriz de Levenshtein

custo de chegar aqui a partir do vizinho superior esquerdo (cópia ou substituição)	custo de chegar aqui a partir do vizinho superior (remoção)
custo de chegar aqui a partir do vizinho da esquerda (inserção)	o mínimo entre os três possíveis "movimentos": o jeito mais barato de chegar aqui

Exercícios

- http://br.spoj.com/problems/MOEDAS/
- https://br.spoj.com/problems/PARQUE/
- http://br.spoj.com/problems/TESOURO
- https://br.spoj.com/problems/DESCULPA/
- https://br.spoj.com/problems/GENEAL/
- https://br.spoj.com/problems/MINIMO/
- https://br.spoj.com/problems/NUVEMMG/