

# Lógica Proposicional Sintaxe

José Gustavo de Souza Paiva

## Lógica Proposicional

- Forma mais simples da lógica
- Fatos do mundo real representados por sentenças sem argumento → proposições
- Proposição
  - Sentença de qualquer natureza que pode ser qualificada como VERDADEIRA ou FALSA

# Lógica Proposicional

- Exemplos
  - $1 + 1 = 2$
  - $0 > 1$

<i>MUNDO REAL</i>	<i>PROPOSIÇÃO LÓGICA</i>
Hoje está chovendo	P
A rua está molhada	Q

# Lógica Proposicional

- Se não é possível definir a interpretação (verdadeiro ou falso) da sentença, ela não é uma proposição
- Exemplos
  - Frases Interrogativas
    - *Qual o seu nome?*
  - Frases Imperativas
    - *Preste atenção!*
  - Paradoxos Lógicos ou ambiguidades
    - *Esta frase é falsa*
    - *Toda regra tem uma exceção*
    - *Eu vi Carlos com um relógio*

# Lógica Proposicional

- A lógica proposicional preocupa-se apenas com o conteúdo e significado das sentenças
  - João comeu o bolo
  - O bolo foi comido por João
- OU
- João comeu o bolo
- João comerá o bolo
- João come o bolo

## Exercício

- Verifique, justificando, se as expressões abaixo são proposições
  - Brasília é a capital do Brasil
  - Uberlândia fica em Goiás
  - $1 + 1 = 2$
  - $2 + 2 = 3$
  - $x + 1 = 2$
  - $x + y = z$
  - Leia isto cuidadosamente

## Exercício

- Verifique, justificando, se as expressões abaixo são proposições
  - Boa sorte!
  - Márcio não é irmão do Mário
  - Não faça isso!
  - Cecília é escritora
  - Quantos japoneses moram no Brasil?

## Linguagem

- Representação do conhecimento
- Duas partes
  - Sintaxe → símbolos e notações
  - Semântica → significado, entendimento
- Definição semelhante a realizada em outras linguagens
  - Alfabeto
  - Palavras

# Alfabeto

- Conjuntos de símbolos visuais, que produzem o que a linguagem quer dizer
- Alfabeto da lógica proposicional
  - Símbolos de pontuação
    - ( ; )
  - Símbolos de verdade
    - **true, false**
  - Símbolos proposicionais
    - **P; Q; R; S; P<sub>1</sub>; Q<sub>1</sub>; R<sub>1</sub>; S<sub>1</sub>; P<sub>2</sub>; Q<sub>2</sub>; ...**
  - Conectivos proposicionais:
    - $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$

# Fórmulas

- Representam as palavras/frases da lógica proposicional
  - Concatenação de símbolos do alfabeto
- Gramática
  - Nem todas as combinações são válidas
- Ideia  $\rightarrow$  obtenção de fórmulas complexas a partir de fórmulas simples
  - É possível obter um conjunto infinito de fórmulas
  - Diferente da língua portuguesa
    - Dicionários

# Fórmulas

- Regras
  1. Todo símbolo verdade é uma fórmula
  2. Todo símbolo proposicional é uma fórmula
  3. Se  $H$  é uma fórmula, então  $(\neg H)$  é uma fórmula
  4. Se  $H$  e  $G$  são fórmulas, então  $(H \vee G)$  é uma fórmula (disjunção das fórmulas  $H$  e  $G$ )
  5. Se  $H$  e  $G$  são fórmulas, então  $(H \wedge G)$  é uma fórmula (conjunção das fórmulas  $H$  e  $G$ )
  6. Se  $H$  e  $G$  são fórmulas, então  $(H \rightarrow G)$  é uma fórmula ( $H$  é o antecedente, e  $G$  consequente)
  7. Se  $H$  e  $G$  são fórmulas, então  $(H \leftrightarrow G)$  é uma fórmula ( $H$  é o lado esquerdo, e  $G$  o lado direito)

# Fórmulas

- Fórmulas mal formadas
  - PR
  - $(R \text{ true } \rightarrow)$
  - $(\text{true } \rightarrow \leftrightarrow (R \text{ true } \rightarrow))$

## Fórmulas

- Pode-se omitir símbolos de pontuação das fórmulas, em alguns casos, mantendo o significado original
- Também é possível usar múltiplas linhas para facilitar a compreensão

## Fórmulas

- Exemplo

- $(( (P \vee Q) \rightarrow true) \leftrightarrow (Q \wedge S))$

- Pode ser escrita como

- $(P \vee Q) \rightarrow true$

- $\leftrightarrow$

- $Q \wedge S$

- ou

- $(( P \vee Q) \rightarrow true) \leftrightarrow (Q \wedge S)$

## Exercício

- Dados os símbolos proposicionais P e Q, mostre que  $((P \wedge Q) \vee ((\neg P) \rightarrow (\neg Q)))$  é uma fórmula proposicional
- Verifique se as fórmulas abaixo são válidas
  - $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \rightarrow P)$
  - $(P \vee \neg PQ) \rightarrow (Q \wedge \neg Q)$
  - $\neg((P \wedge \neg\neg Q) \rightarrow \neg R)$
  - $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg \rightarrow \neg P)$
  - $((Q \wedge R) \vee \neg(\neg Q \vee P) \vee (P \wedge \neg R)) \rightarrow (R \vee \neg P)$

## Fórmulas

- Ordem de precedência
  - Simplificam as fórmulas definindo ordem de aplicação dos símbolos conectivos
  - Usado na linguagem matemática
  - Ex
    - $2 + 4 \times 5 \rightarrow (2 + (4 \times 5))$
  - Em alguns casos, não há ordem de precedência
  - Ex
    - $4 \times 6 / 3 \rightarrow ((4 \times 6) / 3) \text{ ou } (4 \times (6 / 3))$



# Fórmulas

- Ordem de precedência na lógica proposicional
  1.  $\neg$
  2.  $\rightarrow, \leftrightarrow$
  3.  $\vee, \wedge$
- Em alguns casos, não há precedência nos símbolos, e múltiplas interpretações são possíveis
  - Pode se usar múltiplas linhas para facilitar a compreensão nesse caso

# Exercício

- Elimine o maior número possível de parênteses da fórmula, sem alterar seu significado original
  - $((\neg X) \vee ((\neg(X \vee Y)) \vee Z))$
- Identifique quais fórmulas pertencem à lógica proposicional. Justifique sua resposta, apresentando as regras de construção utilizadas ou apontando uma concatenação inválida
  - Para as fórmulas válidas, remova os símbolos de pontuação sem afetar a sua interpretação
    - $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow P) \vee (\neg(\neg R)))$
    - $\vee Q \rightarrow R$
    - $(P \vee R) \rightarrow (Q \leftrightarrow ((\neg T) \wedge R))$
    - $(PQ \vee \text{True})$
    - $((\neg(\neg P)) \leftrightarrow ((\neg((\neg(\neg(P \vee Q))) \rightarrow R)) \wedge P))$
    - $(\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg\neg R \vee \neg P))$

# Fórmulas

- Comprimento de uma fórmula
  - Notação  $\rightarrow \text{comp}[H]$
  - Definição
    - Se H é um símbolo proposicional ou de verdade, então  $\text{comp}[H] = 1$
    - Se H e G são fórmulas da Lógica Proposicional, então
      - $\text{comp}[\neg H] = \text{comp}[H] + 1$
      - $\text{comp}[H \vee G] = \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1$
      - $\text{comp}[H \wedge G] = \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1$
      - $\text{comp}[H \rightarrow G] = \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1$
      - $\text{comp}[H \leftrightarrow G] = \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1$
  - Os símbolos de pontuação não são considerados

# Fórmulas

- Comprimento de fórmulas
  - Usado em demonstrações por indução finita
  - Ex
    - $(P \rightarrow Q)$ :
    - $((P \wedge Q) \leftrightarrow R)$ :

## Fórmulas

- Comprimento de fórmulas
  - Usado em demonstrações por indução finita
  - Ex
    - $(P \rightarrow Q)$ : 3
    - $((P \wedge Q) \leftrightarrow R)$ : 5

## Referências

- Souza, J. N., Lógica para Ciência da Computação, 2ª edição, Editora Campus, 2008
- Martins, L. G. A, Apostila de Lógica Proposicional, FACOM, UFU.
- Neto, R., Lógica Aplicada a Computação, UNIVASF