Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação

Sistema axiomático

Prof. Renato Pimentel

2023/2

Sumário

Introdução

- **Lógica**: estudo das estruturas para **representação** e **dedução** do conhecimento
- **Dedução**: construção de conhecimento
  - Produção de um argumento, utilizando argumentos previamente fornecidos
- Aplicações na vida real e na Computação
  - Construção do aprendizado
  - Implementação de programas

Sistemas de dedução

- Estabelecem estruturas que permitem a representação e dedução do conhecimento
- Três sistemas:
  1. Sistema axiomático
  2. *Tableaux* semânticos
  3. Resolução

Dedução de teoremas

- Processo de **prova por dedução**: Demonstração de que, dadas algumas expressões como verdadeiras (hipóteses ou premissas), uma nova sentença também é verdadeira.
  - A sentença provada é um **teorema** com respeito às hipóteses.
- Derivação da expressão desejada H a partir do conjunto de hipóteses β, utilizando os recursos disponíveis em algum dos sistemas de dedução válidos.

Conceitos

- **Hipóteses** (ou **premissas**): Fórmulas proposicionais que se supõe serem *verdadeiras*.
- **Axiomas**: conhecimentos dados *a priori*.
  - No caso do sistema axiomático, representado por **tautologias**.
- **Regras de inferência**: implicações semânticas utilizadas para fazer inferências:
  - Execução dos "passos" de uma demonstração ou dedução;
  - Maneira de construção do conhecimento, combinando hipóteses e axiomas.

Sistema axiomático

- Estrutura baseada em axiomas.
- Composição:
  - Alfabeto da lógica proposicional
  - Conjunto das fórmulas da lógica proposicional (**hipóteses**)
  - Subconjunto de fórmulas, denominados **axiomas**.
  - Conjunto de **regras de inferência**.

Sistema axiomático

- Objetivos:
  - Estudo formal da representação e dedução de argumentos.
  - Novo conhecimento a partir do conhecimento dado *a priori* $\Rightarrow$ axiomas $+$ hipóteses.

Axiomas

- Fórmulas axiomáticas podem variar entre os sistemas axiomáticos.
- Esquemas de fórmulas:
  - $Ax_1 = \neg(H \lor H) \lor H$
  - $Ax_2 = \neg H \lor (G \lor H)$
  - $Ax_3 = \neg(\neg H \lor G) \lor (\neg(E \lor H) \lor (G \lor E))$
- Outros conectivos podem ser utilizados:
  - $Ax_1 = (H \lor H) \to H$
  - $Ax_2 = H \to (G \lor H)$
  - $Ax_3 = (H \to G) \to ((E \lor H) \to (E \lor G))$
- Infinitas fórmulas.

Mecanismos de inferência

- Pode variar entre sistemas axiomáticos
- **Mais comum**: esquema de regras de inferência chamado *modus ponens*
- *modus ponens*:
  - Dadas as fórmulas H e G, Tendo H e $(H \to G)$, deduza G

Notação

$$MP = \frac{H, (H \to G)}{G}$$

Modus ponens

- $H, (H \rightarrow G)$: **antecedente**.
- G: **consequente**.
- Exemplo:
  - H: "Está chovendo".
  - G: "A rua está molhada".
- *Modus ponens* define um procedimento sintático de dedução do conhecimento.
  - Usado em linguagens de programação como **PROLOG**.

Consequência lógica

- Regras de inferência: mecanismo de inferência aplicado aos axiomas e hipóteses.
- Argumentos obtidos na dedução:
  - consequências lógicas;
  - conhecimento provado.

Consequência lógica

- Sejam H uma fórmula e β um conjunto de fórmulas denominadas por *hipóteses*.
- Uma prova sintática de H a partir de β, num sistema axiomático P_a, é uma sequência de fórmulas $H_1, H_2, \ldots, H_n$, onde
  - $H = H_n$
  - Para todo i tal que $1 \leq i \leq n$,
    - H_i é um axioma ou
    - $H_i \in \beta$ ou
    - H_i é deduzida de H_j e H_k, utilizando a regra *modus ponens*, onde $1 \leq j < i$ e $1 \leq k < i$:

$$MP = \frac{H_j, H_k}{H_i}, \text{ onde } H_k = H_j \to H_i$$

Exemplo

- Conjunto de hipóteses $\beta = \{G_1, \ldots, G_9\}$
  - $G_1 = (P \land R) \to P$
  - $G_2 = Q \to P_4$
  - $G_3 = P_1 \to Q$
  - $G_4 = (P_1 \land P_2) \to Q$
  - $G_5 = (P_3 \land R) \to R$
  - $G_6 = P_4 \to P$
  - $G_7 = P_1$
  - $G_8 = P_3 \to P$
  - $G_9 = P_2$
- Podemos provar $(S \lor P)$?

Exemplo

Sequência de fórmulas $H_1, \ldots, H_9$, prova de $(S \vee P)$, a partir de β:

- $H_1 = G_7 = P_1$
- $H_2 = G_3 = P1 \to Q$
- $H_3 = Q$ (resultado de *modus ponens* em H_1 e H_2)
- $H_4 = G_2 = Q \to P_4$
- $H_5 = P_4$ (resultado de *modus ponens* em H_3 e H_4)
- $H_6 = G_6 = P_4 \to P$
- $H_7 = P$ (resultado de *modus ponens* em H_5 e H_6)
- $H_8 = \mathrm{Ax}_2 = P \to (S \vee P)$
- $H_9 = (S \vee P)$ (resultado de *modus ponens* em H_7 e H_8)

Dada uma fórmula H e um conjunto β:

- Se H tem uma prova a partir de $\beta \Rightarrow$ conhecimento representado por H é deduzido a partir do conhecimento representado pelos axiomas e pelas fórmulas de β.
- Nesse caso, H é uma **consequência lógica** de β.
  - Notação: $\beta \vdash H$.
- H é um **teorema** no sistema axiomático se existe uma prova de H, nesse sistema, que utiliza apenas os axiomas.
  - Conjunto de hipóteses vazio.
  - Notação: $\vdash H$.

Outros mecanismos de inferência

- As regras de inferência são **implicações semânticas**. Elas são utilizadas para fazer inferências, ou seja, executar os "passos" de uma demonstração ou dedução.
- Assim como os axiomas, o conjunto de regras de inferência adotado em um sistema axiomático pode variar, desde que mantenham as propriedades de completude e correção.
- Quanto menor o conjunto de regras de inferência, mais *elegante* é o sistema axiomático.
- A maioria dos sistemas axiomáticos costuma utilizar apenas o *modus ponens* (MP) como regra de inferência. Porém, há outros mecanismos:

Adição disjuntiva	$P \vDash P \vee Q$ ou $Q \vDash P \vee Q$
Simplif. conjuntiva	$P \wedge Q \vDash P$ ou $P \wedge Q \vDash Q$
Conjunção	$P, Q \vDash P \wedge Q$
Simplif. disjuntiva	$(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \vDash P$
Modus ponens	$(P \rightarrow Q) \wedge P \vDash Q$
Modus tollens	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \vDash \neg P$
Silogismo disj.	$(P \vee Q) \wedge \neg Q \vDash P$
Silogismo hip.	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \vDash P \rightarrow R$
Dilema construt.	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R) \vDash Q \vee S$
Dilema construt. 2	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \vDash (P \vee R) \rightarrow (Q \vee S)$
Dilema destrut.	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \vDash \neg P \vee \neg R$
Dilema destrut. 2	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \vDash (\neg Q \vee \neg S) \rightarrow (\neg P \vee \neg R)$
Absorção	$P \rightarrow Q \vDash P \rightarrow (P \rightarrow Q)$ ou $P \rightarrow Q \vDash P \rightarrow (P \wedge Q)$

Exercícios I

1. Verifique a validade dos argumentos, utilizando regras de inferência
   1. $R \to (P \vee Q),\ R,\ \neg P \vdash Q$
   2. $P \to Q,\ \neg Q,\ \neg P \to R \vdash R$
   3. $P \to Q,\ \neg Q,\ P \vee R \vdash R$
   4. $P \vee Q,\ P \to R,\ \neg R \vdash Q \vee S$
   5. $P \to (Q \to R),\ P \to Q,\ P \vdash R$
   6. $P,\ P \to \neg Q,\ \neg Q \to \neg S \vdash \neg S$
   7. $P \to Q,\ Q \to R,\ \neg R,\ \neg P \to S \vdash S$
   8. $P,\ P \vee Q,\ (P \vee Q) \to R \vdash R \vee S$
   9. $P \to (Q \vee R),\ Q \to S,\ R \to P_1 \vdash P \to (S \vee P1)$

Exercícios II

2. Verifique a validade dos argumentos abaixo, utilizando regras de inferência
   - "Está nublado agora. Portanto, ou está nublado ou está chovendo agora."
   - "Está nublado e chovendo agora. Portanto, está nublado agora."
   - "Se chover hoje, então hoje nós não teremos churrasco. Se não tivermos churrasco hoje, então teremos churrasco amanhã. Portanto, se chover hoje, então nós teremos churrasco amanhã."
3. Mostre que as hipóteses "Não está fazendo sol esta tarde e está mais frio do que ontem", "Nós iremos nadar somente se fizer sol esta tarde", "Se nós não formos nadar, então nós vamos velejar", e "Se nós formos velejar, então estaremos em casa no final da tarde." levam à conclusão: "Nós estaremos em casa no final da tarde."

Referências

1. PAIVA, J. G. S. Lógica para Computação. Introdução – notas de aula.
2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.
3. MARTINS, L. G. A, Apostila de Lógica Proposicional, FACOM, UFU.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU
LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU