Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação

Métodos de determinação das propriedades semânticas

Prof. Renato Pimentel

2023/2

Sumário

Introdução

- Análise dos mecanismos que verificam as propriedades semânticas das fórmulas da lógica proposicional.
- Três métodos:
  - Tabela verdade;
  - Árvore semântica;
  - Negação ao absurdo.
- Utilização do método depende da fórmula.

Método da tabela-verdade

- **Força bruta**: *todas* as possibilidades de valores verdade são consideradas.
- Para uma fórmula H, constituída dos símbolos P_1, P_2, P_3, $\ldots$, P_n , são consideradas:
  - $I[P_i] = T$ e $I[P_i] = F$, $1 \leq i \leq n$
  - n símbolos $\Rightarrow$ 2^n possibilidades $\Rightarrow$ 2^{n+1} linhas $\Rightarrow$ não indicado para fórmulas com muitos símbolos.

Exemplo 1: $H = \neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$.

- H é uma tautologia (Lei de De Morgan)
  - Define uma regra para distribuição do conectivo $\neg$ em uma conjunção
  - Transformação do conectivo $\wedge$ em $\vee$.

Exemplo 1: $H = \neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(P \wedge Q)$	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	H
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T

Exemplo 2: $H = \neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(P \vee Q)$	$\neg(P \vee Q)$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$	H
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T	T	T

No método da tabela-verdade:

1. Uma fórmula é uma **tautologia** se a última coluna de sua tabela-verdade contém somente valores T;
2. Uma fórmula é uma **contradição** se a última coluna de sua tabela-verdade contém somente valores F;
3. Uma fórmula é **factível** se a última coluna de sua tabela-verdade contém pelo menos um valor T;
4. Duas fórmulas são **equivalentes semanticamente** quando, para cada linha da tabela-verdade, suas colunas apresentam o mesmo valor;
5. Uma fórmula G **implica semanticamente na fórmula** H se, para toda linha cujo valor da coluna de G é verdadeiro, o valor da coluna de H também é verdadeiro.

Exemplo 3: $P_1 \rightarrow ((P_2 \wedge P_3) \rightarrow ((P_4 \wedge P_5) \rightarrow ((P_6 \wedge P_7) \rightarrow P_8)))$.

Viável?

Que quantidade de linhas que a tabela terá?

Exercício

Determine se as fórmulas a seguir são tautologias:

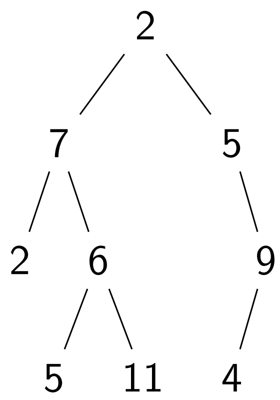
- $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P)$
- $(P \rightarrow R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$
- $\neg(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \wedge Q)$

Método da árvore semântica

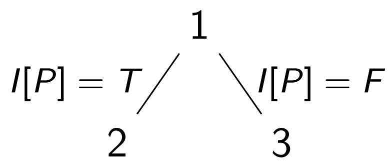
Determinação da validade de uma fórmula a partir de uma árvore

Árvore

Estrutura de dados dada por um conjunto de vértices (nós), interligados por arestas



Exemplo: $H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$



Exemplo: $H = (P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$

- Nó 2: $I[P] = T$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} (& P & \to & Q &) & \leftrightarrow & (& (& \neg & Q &) & \to & (& \neg & P &) &) \\ & T & & & & & & & & & & & & & T & & \end{array}$$

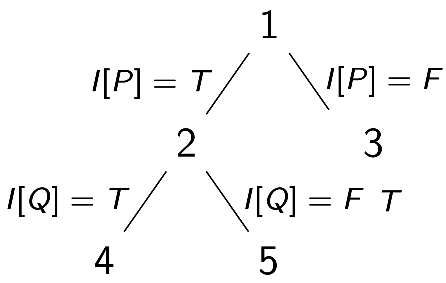
$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} (& P & \to & Q &) & \leftrightarrow & (& (& \neg & Q &) & \to & (& \neg & P &) &) \\ & T & & & & & & & & & & & & F & T & & \end{array}$$

Exemplo: $H = (P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$

- De forma análoga, para o nó 3: $I[P] = F$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} (& P & \to & Q &) & \leftrightarrow & (& (& \neg & Q &) & \to & (& \neg & P &) &) \\ & F & T & & & T & & & & & & T & & T & F & & \end{array}$$

Exemplo: $H = (P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$



Exemplo: $H = (P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$

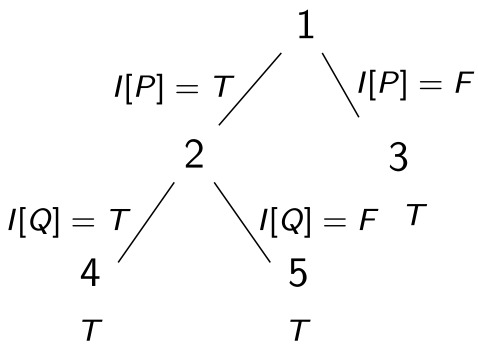
- Nó 4: $I[Q] = T$

$$\begin{array}{cccccccccc} (P & \to Q) & \leftrightarrow & ((\neg & Q) & \to & (\neg & P)) \\ T & T \;\; T & T & F & T & T & F & T \end{array}$$

- Nó 5: $I[Q] = F$

$$\begin{array}{cccccccccc} (P & \to Q) & \leftrightarrow & ((\neg & Q) & \to & (\neg & P)) \\ T & F \;\; F & T & T & F & F & F & T \end{array}$$

Exemplo: $H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$



Todas as **folhas** (nós sem filhos) possuem o símbolo T associado.
Logo, H é uma **tautologia**

No método da árvore semântica:

1. Uma fórmula é uma **tautologia** se só têm valores T em seus nós folhas;
2. Uma fórmula é uma **contradição** se só têm valores F em seus nós folhas;
3. Uma fórmula é **factível** se pelo menos um nó folha com valor T;
4. Duas fórmulas G e H são **equivalentes semanticamente**, se a árvore semântica correspondente à fórmula $G \leftrightarrow H$ for uma tautologia;
5. Uma fórmula G **implica semanticamente na fórmula** H, se a árvore semântica correspondente à fórmula $G \rightarrow H$ for uma tautologia.

Exercício

Determine se as fórmulas a seguir são tautologias:

- $(P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P)$
- $(P \leftrightarrow R) \rightarrow (\neg P \vee R) \vee (\neg R \vee P)$
- $X > 10 \rightarrow X^2 = Y \leftrightarrow X^2 \neq Y \wedge X \leq 10$

Método do absurdo ou negação

- Considera-se inicialmente a negação daquilo que se quer demonstrar.
  - **Exemplo**: Para uma fórmula H a qual se quer demonstrar que é uma tautologia, considera-se que ela não é uma tautologia.
- A partir de um conjunto de deduções, conclui-se um fato contraditório ou absurdo;
- A consideração feita é portanto falsa, logo a afirmação/demonstração é verdadeira.

Exemplo: $H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$

H é uma tautologia?

- Suponha que H não seja uma tautologia. Então, existe I tal que $I[H] = F$.

$$\begin{array}{l} H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \underset{F}{\to} (P \to R) \end{array}$$

Exemplo: $H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$

- Como $I[H] = F$, teremos:
  $I[(P \to Q) \wedge (Q \to R)] = T$ e $I[P \to R] = F$
- Ou seja,

$$H = ((P \to Q) \underset{T}{\wedge} (Q \to R)) \underset{F}{\to} (P \underset{F}{\to} R)$$

Exemplo: $H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$

- Com isso, teremos:

$$\begin{array}{l} H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R) \\ \qquad\qquad T \quad\; T \quad\; T \qquad F \quad TF \;\; F \end{array}$$

- Concluindo que $I[P] = T$ e $I[R] = F$:

$$\begin{array}{l} H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R) \\ \qquad\quad TT \qquad T \quad\; T \;\; F \;\; F \quad TF \;\; F \end{array}$$

Exemplo: $H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$

- Neste momento, é possível concluir que $I[Q] = T$ e $I[Q] = F$, ao mesmo tempo,

$$\begin{array}{l} (P \to Q) \text{ e } (Q \to R)\,, \\ \;TT \qquad\qquad\quad T \;\; F \end{array}$$

- chegando em um absurdo:

$$\begin{array}{l} H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R) \\ \qquad\quad TT \;\; T \;\; T \;\; F\,T \;\; F \;\; F \quad TF \;\; F \end{array}$$

Método do absurdo ou negação

- Utilizada para demonstração da contradição.
- Útil na aplicação em fórmulas com conectivo $\rightarrow$, $\vee$, negação de $\wedge$.
  - Apenas uma situação possível para a negação.
- Utilizada em diversas aplicações na matemática e computação.

- **Ausência do absurdo**: situações nas quais, supondo a negação da afirmação, não se chega a um absurdo.
  - Foi encontrada uma situação na qual a fórmula pode ser falsa/verdadeira.
  - Conclui-se que a consideração feita é plausível, portanto a propriedade semântica sendo testada não se aplica à fórmula em questão.

Exemplo: $H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q)$

- Duas possibilidades: $T \leftrightarrow F$ e $F \leftrightarrow T$
  - Possibilidade 1: não se encontra um absurdo.
  - Possibilidade 2: não se encontra um absurdo.
- Assim, a fórmula não é uma tautologia, pois existem pelo menos duas interpretações I e J, tais que $I[H] = F$ e $J[H] = F$.

Exemplo: $H = (P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

- Duas possibilidades: $T \leftrightarrow F$ e $F \leftrightarrow T$
  - Possibilidade 1: absurdo é encontrado.
  - Possibilidade 2: não se encontra um absurdo.
- Assim, H também não é tautologia.

No método da negação:

1. Uma fórmula é uma **tautologia** se a suposição $\exists I \mid I[H] = F$[1] gerar um absurdo;
2. Uma fórmula é uma **contradição** se a suposição $\exists I \mid I[H] = T$ gerar um absurdo;
3. Uma fórmula é **contingente** quando ela não for tautologia, nem contradição. Neste caso, basta apresentar duas interpretações para H, I e J, onde $I[H] = T$ e $J[H] = F$;
4. Duas fórmulas G e H são **equivalentes semanticamente**, se for possível provar que a fórmula $G \leftrightarrow H$ é uma tautologia;
5. Uma fórmula G **implica semanticamente na fórmula** H, se for possível provar que a fórmula $G \rightarrow H$ é uma tautologia.

[1] Notação: $\exists$: existe; $|$: tal que.

Exercício

Demonstre, utilizando os três métodos de validação estudados, que as fórmulas a seguir são tautologias:

- $((H \rightarrow G) \land (G \rightarrow H)) \rightarrow (H \rightarrow H)$
- $(H \land (G \lor E)) \leftrightarrow ((H \land G) \lor (H \land E))$
- $\neg(H \rightarrow G) \leftrightarrow (H \land (\neg G))$
- $((\neg R \lor Q) \land (\neg Q \lor P)) \rightarrow (R \rightarrow P)$

1. MARTINS, L. G. A. *Apostila de lógica proposicional*, FACOM, UFU.
2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU
LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU