Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação

Propriedades semânticas da lógica de predicados

Prof. Renato Pimentel

2023/2

Sumário

Introdução

- Relacionamento entre os resultados das interpretações das fórmulas
- Mesmos conceitos da Lógica Proposicional:
  - Tautologia
  - Contradição
  - Satisfazibilidade
- Métodos diferentes de verificação:
  - Quantificadores
  - Variáveis
  - Funções
  - Predicados

Satisfazibilidade

- H é **satisfazível** quando existe pelo menos uma interpretação I tal que $I[H] = T$
- **Exemplo**: Considerando I sobre $\mathbb{N}$:
  - $H_1 = p(x, y)$
    $I_1 : I_1[p] =<, \; I_1[x] = 5, \; I_1[y] = 9$
  - $H_2 = (\forall x)p(x, y)$
    $I_2 : I_2[p] =\geq, I_2[y] = 0$
  - $H_3 = (\forall x)(\exists y)p(x, y)$
    $I_3 : I_3[p] =<$
  - $H_4 = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \to p(x, y)$
    $I_4 : I_4[p] =<, I_4[x] = 5, I_4[y] = 9$

Exemplo: $H = \neg((\forall x)p(x,y)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x,z))$
Suponha:

- Domínio: $\mathbb{N}$
- $I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x$ e y são pares
- $I[y] = 4$, $I[z] = 6$.

$$I[H] = T \Leftrightarrow I[\neg((\forall x)p(x,y))] = I[(\exists x)(\neg p(x,z))]$$

$H = \neg((\forall x)p(x,y)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x,z))$

$$I[\neg((\forall x)p(x,y))] = T \Leftrightarrow$$
$$I[(\forall x)p(x,y)] = F \Leftrightarrow$$

- $\exists d \in \mathbb{N} | < x \leftarrow d > I[p(x,y)] = F$
- $\exists d \in \mathbb{N} | d$ e/ou 4 são números ímpares
- $\exists d \in \mathbb{N} | d$ é um número ímpar.

Logo, $I[\neg((\forall x)p(x,y))] = T$.

$H = \neg((\forall x)p(x,y)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x,z))$

$$I[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T \Leftrightarrow$$

- $\exists d \in \mathbb{N} | < x \leftarrow d > I[\neg p(x,z)] = T$
- $\exists d \in \mathbb{N} | < x \leftarrow d > I[p(x,z)] = F$
- $\exists d \in \mathbb{N} | d$ e/ou 6 são números ímpares
- $\exists d \in \mathbb{N} | d$ é um número ímpar.

Logo, $I[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T$.

Concluindo, $I[H] = T$. Ou seja, H é **satisfazível**, pois encontrou-se uma interpretação que a interpreta como verdadeira.

Validade ou tautologia

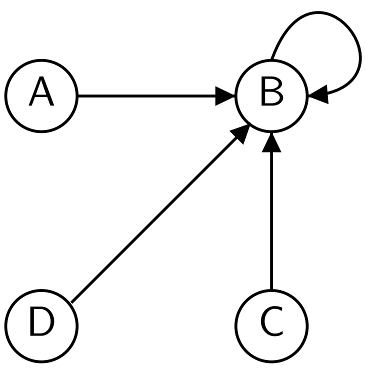
H é **válida** ou uma **tautologia** se, e somente se, **para toda interpretação** I, $I[H] = T$.
Logo, H não é válida se existe uma interpretação J, tal que $J[H] = F$.

Exemplo: $H = \neg((\forall x)p(x,y)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x,z))$
H é válida?

- $J[\neg((\forall x)p(x,y))] = T \Leftrightarrow J[(\forall x)p(x,y)] = F \Leftrightarrow$
  - $\exists d \in U| < x \leftarrow d > J[p(x,y)] = F$
  - $\exists d \in U|p(d,y) = F$
- $J[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T \Leftrightarrow$
  - $\exists d \in U| < x \leftarrow d > J[\neg p(x,z)] = T$
  - $\exists d \in U| < x \leftarrow d > J[p(x,z)] = F$
  - $\exists d \in U|p(d,z) = F$.

$H = \neg((\forall x)p(x,y)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x,z))$

- $\exists d \in U|p(d,y) = F$ deve ser falsa e
- $\exists d \in U|p(d,z) = F$ deve ser verdadeira
- Suponha uma interpretação J sobre $U = \{A, B, C, D\}$
- J é definido de acordo com a figura:



onde $p(r,s) = T$ se, e somente se, há uma seta de r para s.

$H = \neg((\forall x)p(x, y)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x, z))$

- Além disso, suponha que
  - $J[y] = B$,
  - $J[z] = A$.
  - $\exists d \in U | p(d, y) = F$ equivale a
    - $\exists d \in U | p(d, B) = F$
    - Tal afirmação é falsa
  - $\exists d \in U | p(d, z) = F$ equivale a
    - $\exists d \in U | p(d, A) = F$
    - Tal afirmação é verdadeira
- Logo, $J[H] = F$
- Assim, H não é uma tautologia (válida) – encontrou-se uma interpretação J para a qual a fórmula é falsa.

Igualdade e interpretação

Sejam H e G duas fórmulas da lógica de predicados e I uma interpretação. Então:

- $I[H] = I[G]$ se, e somente se, $\{I[H] = T \Leftrightarrow I[G] = T\}$
- $I[H] = I[G]$ se, e somente se, $\{I[H] = F \Leftrightarrow I[G] = F\}$

Exemplo: $G = \neg((\forall x)p(x)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x))$

- G é uma tautologia se para toda interpretação J, $J[G] = T$;
- $J[G] = T \Leftrightarrow J[\neg((\forall x)p(x))] = J[(\exists x)(\neg p(x))]$;
- $J[\neg((\forall x)p(x))] = J[(\exists x)(\neg p(x))]$ se $J[\neg((\forall x)p(x))] = T \Leftrightarrow J[(\exists x)(\neg p(x))] = T$.

$G = \neg((\forall x)p(x)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x))$

- $J[\neg((\forall x)p(x))] = T \Leftrightarrow$
  - $J[(\forall x)p(x)] = F \Leftrightarrow$
  - $\exists d \in U| < x \leftarrow d > J[p(x)] = F$
- $J[(\exists x)(\neg p(x))] = T \Leftrightarrow$
  - $\exists d \in U| < x \leftarrow d > J[\neg p(x)] = T$
  - $\exists d \in U| < x \leftarrow d > J[p(x)] = F$
- Assim:

$$J[\neg((\forall x)p(x))] = T \Leftrightarrow$$
$$\exists d \in U| < x \leftarrow d > J[p(x)] = F \Leftrightarrow$$
$$J[(\exists x)(\neg p(x))] = T$$

- Logo, $J[\neg((\forall x)p(x))] = J[(\exists x)(\neg p(x))]$, e portanto G é uma tautologia – bi-implicação onde ambos o lado esquerdo e direito têm sempre a mesma interpretação.

Determine se
$H = (\exists y)(\forall x)q(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x, y)$
é ou não uma tautologia.

$H = (\exists y)(\forall x)q(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x, y)$

Resolução:

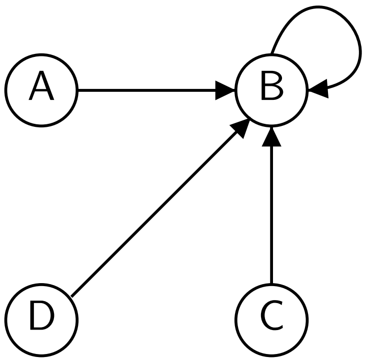
$$I[H] = F \Leftrightarrow I[(\exists y)(\forall x)q(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x, y)] = F \Leftrightarrow$$
$$I[(\exists y)(\forall x)q(x, y)] = T \text{ e } I[(\forall x)(\exists y)q(x, y)] = F$$

- $I[(\exists y)(\forall x)q(x, y)] = T \Leftrightarrow$
  - $\exists d \in U| < y \leftarrow d > I[(\forall x)q(x, y)] = T$
  - $\exists d \in U, \forall e \in U| < x \leftarrow e >< y \leftarrow d > I[q(x, y)] = T$
  - $\exists d \in U, \forall e \in U|q_I(e, d) = T$
- $I[(\forall x)(\exists y)q(x, y)] = F \Leftrightarrow$
  - $\exists r \in U| < x \leftarrow r > I[(\exists y)q(x, y)] = F$
  - $\exists r \in U, \forall s \in U| < y \leftarrow s >< x \leftarrow r > I[q(x, y)] = F$
  - $\exists r \in U, \forall s \in U|q_I(r, s) = F$

$H = (\exists y)(\forall x)q(x,y) \to (\forall x)(\exists y)q(x,y)$

$$\exists d \in U, \forall e \in U | q(e,d) = T$$
$$\exists r \in U, \forall s \in U | q(r,s) = F$$

- **Afirmações contraditórias**.
- Demonstração: Exemplo no universo dos conjuntos:



onde $q(r,s) = T$ se, e somente se, há uma seta de r para s.

As duas afirmações podem ser interpretadas por meio do diagrama anterior como segue, respectivamente:

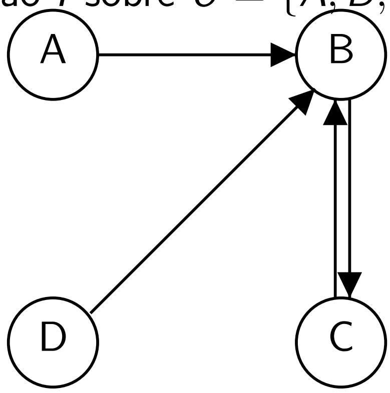
- Existe $d \in U$ (no caso, o elemento B) tal que para todo elemento de U – incluindo B – existe uma flecha o ligando a B. Esta afirmação, portanto, está satisfeita pelo diagrama.
- Existe pelo menos um elemento r de U que não está ligado a nenhum outro – inclusive não se conecta a B do item anterior, o que gera a contradição. Note que esta não é satisfeita pelo exemplo do diagrama.

Por fim, como conclusão, H é uma tautologia, pois na tentativa de mostrar-se que existe I tal que $I[H] = F$, gerou-se uma contradição (mesmo raciocínio visto no método da negação, estudado na lógica proposicional).

Outro exemplo:
$E = (\forall x)(\exists y)q(x, y) \to (\exists y)(\forall x)q(x, y)$
Resolução:

- $I[(\forall x)(\exists y)q(x, y)] = T \Leftrightarrow$
  - $\forall d \in U| < x \leftarrow d > I[(\exists y)q(x, y)] = T$
  - $\forall d \in U, \exists e \in U| < y \leftarrow e >< x \leftarrow d > I[q(x, y)] = T$
  - $\forall d \in U, \exists e \in U|q_I(d, e) = T$
- $I[(\exists y)(\forall x)q(x, y)] = F \Leftrightarrow$
  - $\forall r \in U| < y \leftarrow r > I[(\forall x)q(x, y)] = F$
  - $\forall r \in U, \exists s \in U| < x \leftarrow s >< y \leftarrow r > I[q(x, y)] = F$
  - $\forall r \in U, \exists s \in U|q_I(s, r) = F$

$E = (\forall x)(\exists y)q(x, y) \to (\exists y)(\forall x)q(x, y)$
Considere uma interpretação I sobre $U = \{A, B, C, D\}$:



onde $p(r, s) = T$ se, e somente se, há uma seta de r para s.
As situações descritas são satisfeitas pelo diagrama apresentado.
Conclui-se portanto que $I[E] = F$.
Ou seja, E não é uma tautologia, pois encontrou-se I onde E é falsa.

Implicação semântica

Exemplo: $H = (\forall x)p(x) \vDash G = p(a)$

- $H \vDash G \Leftrightarrow \forall I$, se $I[H] = T$ então $I[G] = T$.
- Suponha uma interpretação I sobre U, tal que $I[H] = T$.

$$I[H] = T \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T \Leftrightarrow$$
$$\forall d \in U, < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \Leftrightarrow$$
$$\forall d \in U, p(d) = T$$

$$\vDash$$

$$p(a) = T \Leftrightarrow$$
$$I[p(a)] = T \Leftrightarrow I[G] = T$$

Insatisfazibilidade

Considere:

$$H = (\forall x)(\exists y)E(x, y)$$
$$H_s = (\forall x)E(x, f(x))$$

onde E é uma fórmula que contém as variáveis (livres) x e y, e f é uma função qualquer.

Proposição: Se H é insatisfazível, então H_s (chamada de *skolemização de* H) é insatisfazível.

$$H = (\forall x)(\exists y)E(x, y)$$
$$H_s = (\forall x)E(x, f(x))$$

- H é insatisfazível $\Leftrightarrow$
- $I[(\forall x)(\exists y)E(x, y)] = F \Leftrightarrow$
- $\exists d \in U| < x \leftarrow d > I[(\exists y)E(x, y)] = F \Leftrightarrow$
- $\exists d \in U, \forall b \in U| < y \leftarrow b >< x \leftarrow d > I[E(x, y)] = F$
- $\exists d \in U, \forall b \in U|E_I(d, b) = F$.

$$H = (\forall x)(\exists y)E(x, y)$$
$$H_s = (\forall x)E(x, f(x))$$

Logo, existe $d \in U$ tal que, para qualquer b, temos $E_I(d, b) = F$.
Se f é uma função tal que $f_I(d) = b$:

- $I[H] = F \Leftrightarrow$
- $\exists d \in U, \forall b \in U|E_I(d, b) = F \Leftrightarrow$
- $\exists d \in U|E_I(d, f_I(d)) = F \Leftrightarrow$
- $\exists d \in U| < x \leftarrow d > I[E(x, f(x))] = F \Leftrightarrow$
- $I[(\forall x)E(x, f(x))] = F \Leftrightarrow$
- $I[H_s] = F$

Como I é uma interpretação qualquer, concluímos que, para toda interpretação I, $I[H_s] = F$.
Logo, se H é insatisfazível, H_s é insatisfazível, *cqd*.

Interpretação e variáveis que não ocorrem livres

Seja H uma fórmula, na qual uma variável x não ocorre livre.
Dada uma interpretação I sobre U, então

$$\forall d \in U, <x \leftarrow d> I[H] = I[H]$$

- **Exemplo:** $(\forall x)p(x)$
- $\forall d \in U, <x \leftarrow d> I[(\forall x)p(x)] = I[(\forall x)p(x)]$
- $\forall d \in U, <x \leftarrow d> I[(\forall x)p(x)] = T \Leftrightarrow$
- $\forall d \in U, \forall c \in U, <x \leftarrow c><x \leftarrow d> I[p(x)] = T \Leftrightarrow$
- $\forall c \in U, <x \leftarrow c> I[p(x)] = T \Leftrightarrow$
- $I[(\forall x)p(x)] = T$

Exercícios I

1. Demonstre que H e G são equivalentes:
   1. $H = \neg(\exists y)H_1, G = (\forall y)\neg H_1$
   2. $H = (\forall x)(\forall x)p(x), G = (\forall x)p(x)$
2. Mostre que as fórmulas a seguir são tautologias:
   1. $H = (\forall x)p(x) \rightarrow p(a)$
   2. $H = p(a) \rightarrow (\exists x)p(x)$
3. Verifique se as fórmulas a seguir são tautologias ou não:
   1. $H = (\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)p(x)$
   2. $H = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow (\exists y)p(y, y)$

Exercícios II

4. Considere uma fórmula H onde x não ocorre livre, e uma fórmula G qualquer:
   1. Mostre que as fórmulas E_1 e E_2 são equivalentes, considerando:
      $E_1 = (\forall x)(H \vee G)$
      $E_2 = (H \vee (\forall x)G)$
   2. Mostre que as fórmulas a seguir são equivalentes:
      $H = (\exists x)(p(x) \rightarrow r(x))$
      $G = (\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x)$

Referências

1. PAIVA, J. G. S. Lógica para Computação. Introdução – notas de aula.
2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU
LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU