Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação

Propriedades semânticas da lógica proposicional

Prof. Renato Pimentel

2023/2

Sumário

Introdução

- Relacionamento dos resultados das interpretações semânticas de fórmulas
- Teoria dos modelos – estudo das relações entre propriedades sintáticas e semânticas
  - Uma das principais razões da aplicação da lógica à Computação

Propriedades semânticas

1. Uma fórmula H é uma **tautologia** se, e somente se, para toda interpretação I, $I[H] = T$.
2. Uma fórmula H é **factível** ou **satisfazível** se, e somente se, existe pelo menos uma interpretação I, tal que $I[H] = T$.
3. Uma fórmula H é uma **contingência** se, e somente se, existem duas interpretações I e J, tais que $I[H] = T$ e $J[H] = F$.
4. Uma fórmula H é **insatisfazível**, **contraditória**, **logicamente falsa** ou ainda, **inconsistente** se, e somente se, para toda interpretação I, $I[H] = F$.

5. (**Implicação semântica ou tautológica**) H **implica semanticamente em** G se, e somente se, para toda interpretação I, se $I[H] = T$ então $I[G] = T$.
   - Notação: $H \vDash G$
6. (**Equivalência semântica ou tautológica**) H **equivale semanticamente a** G se, e somente se, para toda interpretação I, $I[H] = I[G]$.

Tautologia e veracidade

A validade (tautologia) representa mais do que a veracidade: Uma fórmula pode ser verdadeira para uma determinada interpretação, mas não ser válida.

Exemplo 1: $H = P \vee \neg P$

- $I[H] = T \Leftrightarrow I[P \vee \neg P] = T \Leftrightarrow I[P] = T$ e/ou $I[\neg P] = T \Leftrightarrow I[P] = T$ e/ou $I[P] = F$.
- Como $I[P] \in \{T, F\}$, então $I[P] = T$ ou $I[P] = F$, e a afirmação $I[P] = T$ e/ou $I[P] = F$ é verdadeira, e $I[H] = T$.
- Assim, a fórmula é uma tautologia

Princípio do terceiro-excluído

Dada uma proposição e sua negação, pelo menos uma delas é verdadeira.

Exemplo 2:

- $H = (P \vee Q)$
  - $I[P] = T$, $I[Q] = F$,
  - $J[P] = F$, $J[Q] = F$
- Temos que $I[H] = T$ e $J[H] = F$.
- Logo, H é **factível** e **contingente**.

Tautologia é um **subconjunto** das fórmulas factíveis.

Exemplo 3:

- $G = (P \wedge \neg P)$
- Suponha que exista I tal que $I[G] = T$.
  - $I[G] = T \Leftrightarrow I[P \wedge \neg P] = T \Leftrightarrow I[P] = T$ e $I[\neg P] = T \Leftrightarrow I[P] = T$ e $I[P] = F$.
- Como $I[P] \in \{T, F\}$, então $I[P] = T$ **ou** $I[P] = F$
- Logo, conclui-se que $I[G] = T$ **é falso**, e portanto $I[G] = F$. Portanto, **a fórmula é uma contradição**.

Exemplo 4:

- $E = ((P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q) \rightarrow Q)$
- Se $I[Q] = T$, então $I[(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q) \rightarrow Q] = T$.
- Se $I[Q] = F$, então $I[P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q] = F$, e assim, $I[(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q) \rightarrow Q] = T$.
- Portanto, a fórmula é uma tautologia.

Exemplo 5:

- $D = ((P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q) \rightarrow \neg Q)$
- Se $I[Q] = T$, então $I[\neg Q] = F$, e não há como saber se $I[P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q] = T$ ou $I[P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q] = F$.
- Se $I[Q] = F$, então $I[P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q] = F$ e $I[\neg Q] = T$. Logo, $I[(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q) \rightarrow \neg Q] = T$.
- Portanto, a fórmula é factível.

Exemplo 6:

- $C = (P \lor \neg P) \rightarrow (Q \land \neg Q)$
- Para toda interpretação I, $I[P \lor \neg P] = T$.
- Para toda interpretação I, $I[Q \land \neg Q] = F$.
- Assim, teremos que $I[(P \lor \neg P) \rightarrow (Q \land \neg Q)] = F$, para qualquer interpretação I.
- Portanto, a fórmula é contraditória.

Implicação semântica

Observação importante

A definição diz que, se $I[H] = T$, então $I[G] = T$
No entanto, isso **não** quer dizer que, para toda interpretação I, $I[H] = I[G]$, ou que $I[H] = T$ e $I[G] = T$

- Caso haja uma interpretação J, tal que $J[H] = F$, nada poderá ser dito a respeito de $J[G]$
- Enquanto $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ são símbolos sintáticos para implicação e equivalência, $\vDash$ e $\Leftrightarrow$ são elementos da metalinguagem para representar a implicação e equivalência semântica

Exemplo 7: Tabela verdade das fórmulas

- $E = ((P \wedge Q) \vee Q)$
- $H = (P \wedge Q)$
- $G = (P \rightarrow Q)$

P	Q	E	H	G
T	T	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

É possível notar que:

- E implica em G;
- E não implica em H;
- H implica em G;
- H implica em E;
- G não implica em E;
- G não implica em H.

Exemplo 8:

- $H = (P \wedge Q)$
- $G = P$
- Neste caso, H implica em G;
- Nada se pode dizer a respeito de G implicar em H;
- Ainda, se existir uma interpretação J tal que $J[H] = F$, nada se pode dizer sobre $J[G]$.

Exemplo 9: determinar as relações entre H e G:

- $H = (\neg P \wedge \neg Q)$
- $G = \neg(P \vee Q)$
- Se $I[H] = T$:
  $I[\neg P \wedge \neg Q] = T \Leftrightarrow I[\neg P] = T$ e $I[\neg Q] = T \Leftrightarrow I[P] = F$ e $I[Q] = F \Leftrightarrow I[P \vee Q] = F \Leftrightarrow I[\neg(P \vee Q)] = T$
- Se $I[H] = F$:
  $I[\neg P \wedge \neg Q] = F \Leftrightarrow I[\neg P] = F$ e/ou $I[\neg Q] = F \Leftrightarrow I[P] = T$ e/ou $I[Q] = T \Leftrightarrow I[P \vee Q] = T \Leftrightarrow I[\neg(P \vee Q)] = F$
- Portanto, H e G são equivalentes.

Exercício

Demonstrar pela definição do significado dos conectivos que X implica semanticamente em $Y \rightarrow X$.

Exercício

Verifique se as fórmulas abaixo são implicações semânticas:

- $P \vDash \text{true}$
- $(X \neq 0 \rightarrow X = Y) \wedge (X \neq Y) \vDash (X = 0)$
- $P \vee (Q \wedge R \wedge S \wedge (Q_1 \rightarrow R_1)) \vDash P \wedge \text{true}$
- $(P \leftrightarrow Q) \wedge (P \vee Q) \vDash Q$

Exercício

Descobrir quais das seguintes fórmulas são tautologias, contradições ou factíveis:

- $(P \lor Q) \leftrightarrow (Q \lor P)$
- $\neg(P \land Q) \leftrightarrow (\neg P \land \neg Q)$
- $((P \land Q) \land Q) \leftrightarrow \neg((Q \land P) \land P)$
- $(P \rightarrow (P \land Q)) \leftrightarrow P$
- $(\neg P \leftrightarrow \neg Q) \lor (P \rightarrow Q)$
- $((P \lor Q) \lor R) \leftrightarrow (P \lor (Q \lor R))$

Equivalências clássicas I

Identificação	**fórmula** H	**fórmula** G
Dupla negativa	$\neg(\neg E)$	E
Propriedades de identidade	$E \lor \text{false}$	E
	$E \land \text{true}$	E
Propriedades complementares	$E \lor \neg E$	true
	$E \land \neg E$	false
Leis de De Morgan	$\neg(E \land R)$	$\neg E \lor \neg R$
	$\neg(E \lor R)$	$\neg E \land \neg R$
Contraposição	$E \rightarrow R$	$\neg R \rightarrow \neg E$

Equivalências clássicas II

Identificação	fórmula H	fórmula G
Propriedades de substituição	$E \rightarrow R$	$\neg E \vee R$
	$E \leftrightarrow R$	$(E \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow E)$
Propriedades comutativas	$E \vee R$	$R \vee E$
	$E \wedge R$	$R \wedge E$
Propriedades associativas	$E \vee (R \vee S)$	$(E \vee R) \vee S$
	$E \wedge (R \wedge S)$	$(E \wedge R) \wedge S$
Propriedades distributivas	$E \vee (R \wedge S)$	$(E \vee R) \wedge (E \vee S)$
	$E \wedge (R \vee S)$	$(E \wedge R) \vee (E \wedge S)$
Prova condicional	$E \rightarrow (R \rightarrow S)$	$(E \wedge R) \rightarrow S$

Satisfabilidade de fórmulas

- Dada uma fórmula H e uma interpretação I, então I **satisfaz** H se, e somente se, $I[H] = T$
- Um conjunto de fórmulas $\beta = \{H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n\}$ **é satisfazível** se existe pelo menos uma interpretação I tal que $I[H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n] = T$
  - Dizemos que $I[\beta] = T$
- **Obs.**: Dado um conjunto de fórmulas vazio, então toda interpretação I o satisfaz
- *Conjuntos de fórmulas satisfatíveis são importantes na computação*:
  - **Programas lógicos** são conjuntos de fórmulas satisfatíveis.

Exemplo 10:

- $H_1 = P$
- $H_2 = \neg P$
- $H_3 = Q$
- Tal conjunto de fórmulas é insatisfazível.

Exemplo 11:

- $H_1 = (P \to Q)$
- $H_2 = (Q \to R)$
- $H_3 = (R \to P)$
- Tal conjunto de fórmulas é satisfazível.

Exemplo 12:

- $H_1 = (P \rightarrow Q)$
- $H_2 = (Q \rightarrow R)$
- $H_3 = (R \rightarrow S)$
- $H_4 = (S \rightarrow P)$
- $H_5 = \neg(S \rightarrow Q)$
- Tal conjunto de fórmulas é insatisfazível.

Relações entre propriedades semânticas

1. **Validade e contradição**

- Dada uma fórmula H, H é válida se, e somente se, $\neg H$ é contraditória.
- Demonstração:
  H é válida $\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[H] = T \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[\neg H] = F \Leftrightarrow \neg H$ é contraditória.

2 Validade e satisfabilidade

- Dada uma fórmula H, se H é válida, então H é satisfazível.
- Demonstração:
  H é válida $\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[H] = T$. Portanto, existe ao menos uma interpretação I tal que $I[H] = T$.

3 Insatisfabilidade e contradição

- Dada uma fórmula H, H não é satisfazível se, e somente se, H é uma contradição.
- Demonstração:
  - Se H não é satisfazível, então não existe I tal que $I[H] = T$.
  - Assim, para toda interpretação I, $I[H] = F$.
  - Logo, H é uma contradição.

④ Implicação semântica e o conectivo $\rightarrow$

- Dadas duas fórmulas H e G, H implica semanticamente em G se, e somente se, $(H \rightarrow G)$ é uma tautologia.
- Demonstração:
  H implica em $G \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, se $I[H] = T$ então $I[G] = T \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[H \rightarrow G] = T \Leftrightarrow (H \rightarrow G)$ é uma tautologia.

⑤ Equivalência e o conectivo $\leftrightarrow$

- Dadas duas fórmulas H e G, H equivale a G se, e somente se, $(H \leftrightarrow G)$ é uma tautologia.
- Demonstração:
  H equivale a $G \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[H] = I[G] \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[H \leftrightarrow G] = T \Leftrightarrow (H \leftrightarrow G)$ é uma tautologia.

6. **Equivalência e implicação**

- Dadas duas fórmulas H e G, se H equivale a G então H implica semanticamente em G e G implica semanticamente em H.
- Demonstração:
  H equivale a $G \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[H] = I[G] \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, se $I[H] = T$ então $I[G] = T$ e se $I[G] = T$ então $I[H] = T \Leftrightarrow H$ implica semanticamente em G e G implica semanticamente em H.

7. **Transitividade da equivalência**

- Dadas as fórmulas E, H e G, se E equivale a H e H equivale a G, então E equivale a G.
- Demonstração:
  - E equivale a $H \Leftrightarrow (E \leftrightarrow H)$ é uma tautologia.
  - H equivale a $G \Leftrightarrow (H \leftrightarrow G)$ é uma tautologia.
  - Se $(E \leftrightarrow H)$ e $(H \leftrightarrow G)$ são tautologias, para toda interpretação I, $I[E] = I[H]$ e $I[H] = I[G]$.
  - Logo, para toda interpretação I, $I[E] = I[G]$, e $(E \leftrightarrow G)$ é uma tautologia, e E equivale a G.

8. **Satisfatibilidade dos conjuntos e factibilidade das fórmulas**

- Seja $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ um conjunto de fórmulas. Então, $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ é satisfazível se, e somente se, $(H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n)$ é satisfazível.
- Demonstração:
  - $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ é satisfazível $\Leftrightarrow$ existe interpretação I tal que $I[H_1] = I[H_2] = \cdots = I[H_n] = T \Leftrightarrow$ existe interpretação I tal que:
    - ★ $I[H_1 \land H_2] = T$ e
    - ★ $I[H_2 \land H_3] = T$ e
    - ★ ...
    - ★ $I[H_{n-1} \land H_n] = T$.
  - Isto ocorre se, e somente se, I é tal que $I[H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n] = T \Leftrightarrow (H_1 \land H_2 \land \cdots \land H_n)$ é satisfazível.

Exercício

Demonstre, com o auxílio das equivalências clássicas, que as fórmulas abaixo são equivalentes:

- $Q \rightarrow (Q \land P)$ e $(\neg Q \lor Q) \land (\neg Q \lor P)$.
- $(\neg P \lor \neg Q) \rightarrow \neg R$ e $(R \rightarrow P) \land (R \rightarrow Q)$
- $(\neg(P \rightarrow Q) \lor S) \land \neg P$ e $(P \lor S) \land ((Q \rightarrow S) \land \neg P)$

Referências

1. MARTINS, L. G. A. *Apostila de lógica proposicional*, FACOM, UFU.
2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU
LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU