Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação

Relações semânticas entre os conectivos

Prof. Renato Pimentel

2023/2

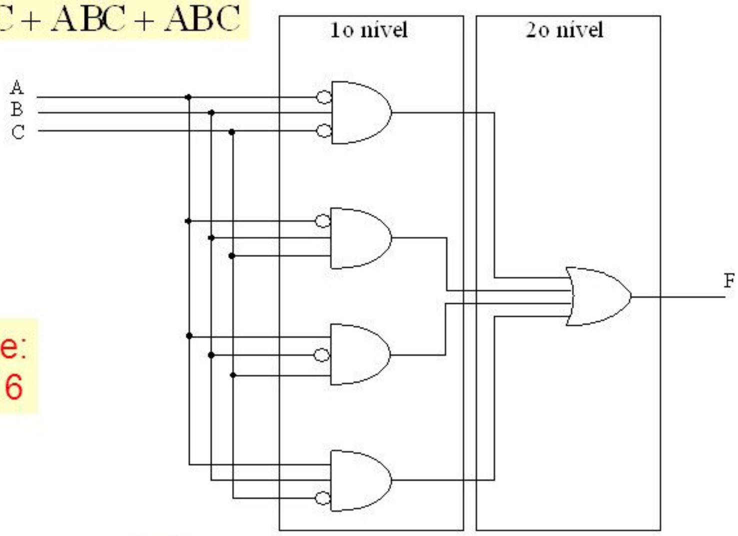
Sumário

Introdução

- **Objetivo**: estudar as relações de significado entre os conectivos da lógica proposicional
  - Alterações nos conectivos usados em uma fórmula podem gerar outras fórmulas com o mesmo significado
- Conjuntos completos de conectivos
- Diversas aplicações
  - Simplificação do alfabeto da lógica proposicional
  - Redução do conjunto de conectivos
- Simplificação de circuitos eletrônicos

Exemplo: circuitos lógicos I

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

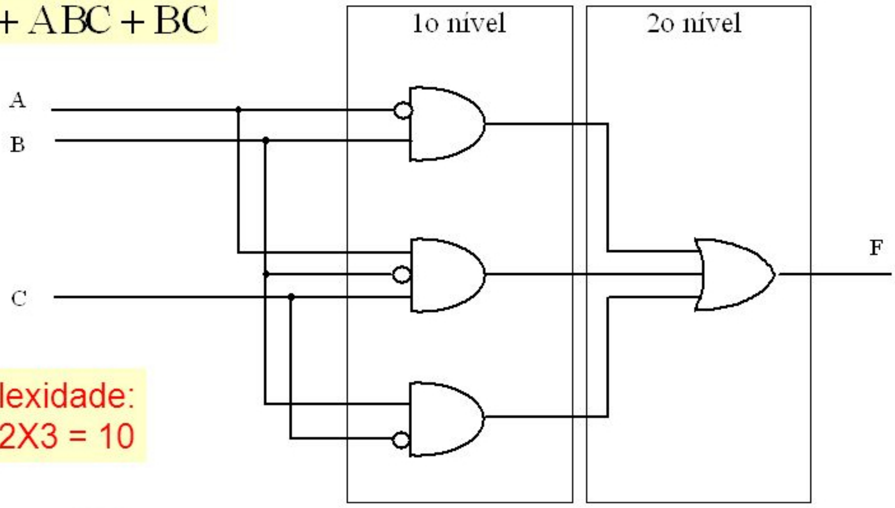


Complexidade:
4x3 + 1x4 = 16

Soma de mintermos ➡ Circuito com (lógica de) 2 níveis

Exemplo: circuitos lógicos II

$$F = \overline{A}B + A\overline{B}C + B\overline{C}$$



Complexidade:
2x2 + 2X3 = 10

Soma de produtos (simplificada) → **Circuito com (lógica de) 2 níveis**

Conjunto de conectivos completos

Seja Ψ um conjunto de conectivos:

- Ψ é completo se dada uma fórmula H do tipo $\neg P$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \leftrightarrow Q)$, é possível determinar uma outra fórmula G equivalente a H que contém apenas os conectivos de Ψ e os símbolos P e Q em H.
- Tudo que é expresso semanticamente pelos conectivos lógicos será também expresso pelos conectivos do conjunto completo (**regras de trocas**).

Conjunto completo $\{\neg, \vee\}$

- Equivalência entre $\rightarrow$ e $\{\neg, \vee\}$:
- Foi visto que $H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ é uma tautologia.

P	Q	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	H
F	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T

Conjunto completo $\{\neg, \vee\}$

- Equivalência entre $\rightarrow$ e $\{\neg, \vee\}$:
  - Assim, $(P \rightarrow Q)$ e $(\neg P \vee Q)$ são equivalentes.
  - $(P \rightarrow Q)$ pode ser expressa por $(\neg P \vee Q)$, mantendo o significado.
  - O que é expresso semanticamente pelo conectivo $\rightarrow$ pode ser expresso usando os conectivos $\neg$ e $\vee$.

Conjunto completo $\{\neg, \vee\}$

- Equivalência entre $\wedge$ e $\{\neg, \vee\}$:
- Foi visto que $H = (P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$ é uma tautologia.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	H
F	F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
T	T	F	F	T	T	T

Conjunto completo $\{\neg, \vee\}$

- Equivalência entre $\wedge$ e $\{\neg, \vee\}$:
  - Assim, $(P \wedge Q)$ e $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ são equivalentes.
  - $(P \wedge Q)$ pode ser expressa por $\neg(\neg P \vee \neg Q)$, mantendo o significado.
  - O que é expresso semanticamente pelo conectivo $\wedge$ pode ser expresso usando os conectivos $\neg$ e $\vee$.

Conjunto completo $\{\neg, \vee\}$

- Equivalência entre $\leftrightarrow$ e $\{\neg, \vee\}$:
- $(P \leftrightarrow Q)$ equivale a $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$.
  - $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$ equivale a $((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P))$
  - $((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P))$ equivale a $\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$
- Como a equivalência entre fórmulas é transitiva:
  $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$

Regra de substituição

- Sejam E_G , E_H, G e H fórmulas da lógica proposicional, tais que:
  - G e H são subfórmulas de E_G e E_H, respectivamente;
  - E_H é obtida de E_G substituindo todas as ocorrências da formula G em E_G por H.
- Se G equivale a H, então E_G equivale a E_H.

Exemplo:

- Dada uma fórmula E, obter uma fórmula G equivalente a E, contendo apenas os conectivos $\{\neg, \vee\}$
- $E = (P \leftrightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)$

Exemplo: $E = (P \leftrightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)$

- $P \leftrightarrow Q$ equivale a $\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$
- Assim, obtemos E_1:
  $E_1 = \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)) \vee (R \rightarrow S)$
- $(R \rightarrow S)$ equivale a $(\neg R \vee S)$;
- Assim, obtemos G:
  $G = \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \vee S)$, equivalente a E.

O conectivo nand

Considerando o **conectivo** nand, definido por:
$(P \text{ nand } Q) = (\neg(P \wedge Q))$

- O conjunto $\{\text{nand}\}$ é completo.
- Para verificar tal fato, utiliza-se as equivalências
  - $\neg P$ equivale a $(P \text{ nand } P)$
  - $(P \vee Q)$ equivale a $((P \text{ nand } P) \text{ nand} (Q \text{ nand } Q))$.
- Como o conjunto $\{\neg, \vee\}$ é completo, e as equivalências entre esses conectivos e o conectivo nand existem, então o conjunto $\{\text{nand}\}$ é completo.

Exemplo

Dada uma fórmula H, obter uma fórmula G, equivalente a H, contendo apenas o conectivo nand e os símbolos proposicionais de H.
$H = P \wedge (R \rightarrow S)$

- $P \wedge (R \rightarrow S)$ equivale a $P \wedge (\neg R \vee S)$
- $P \wedge (\neg R \vee S)$ equivale a $P \wedge \neg\neg(\neg R \vee S)$
- $P \wedge \neg\neg(\neg R \vee S)$ equivale a $P \wedge \neg(R \wedge \neg S)$
- $P \wedge \neg(R \wedge \neg S)$ equivale a $P \wedge (R \text{ nand } \neg S)$
- $P \wedge (R \text{ nand } \neg S)$ equivale a $P \wedge (R \text{ nand} (S \text{ nand } S))$
- $P \wedge (R \text{ nand} (S \text{ nand } S))$ equivale a $\neg\neg(P \wedge (R \text{ nand} (S \text{ nand } S)))$
- $\neg\neg(P \wedge (R \text{ nand} (S \text{ nand } S)))$ equivale a $\neg(P \text{ nand} (R \text{ nand} (S \text{ nand } S)))$
- $\neg(P \text{ nand} (R \text{ nand} (S \text{ nand } S)))$ equivale a
  $(P \text{ nand} (R \text{ nand} (S \text{ nand } S))) \text{ nand} (P \text{ nand} (R \text{ nand} (S \text{ nand } S)))$

- O alfabeto da lógica proposicional pode ser redefinido, considerando apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$.
- **Importante**: a linguagem da lógica proposicional não é modificada.
- Como true equivale a $\neg$false, apenas o símbolo false é considerado.

Alfabeto modificado da lógica proposicional:

- Símbolos de pontuação: (;).
- Símbolos de verdade: false.
- Símbolos proposicionais: P; Q; R; S; P_1; Q_1; R_1; S_1; P_2; Q_2; $\ldots$.
- Conectivos proposicionais: $\neg$; $\vee$.

Este alfabeto pode ser redefinido de outras formas.

Exercícios

Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras, justificando:

- $(\neg P)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\vee$ e P
  - **não é possível**
- $(P \vee Q)$ pode ser expressa equivalentemente usando apenas o conectivo $\rightarrow$, P e Q
  - **é possível**: $(P \rightarrow Q) \rightarrow Q$
- Demonstre a validade das equivalências a seguir:
  - $\neg P \Leftrightarrow (P \,\text{nand}\, P)$
  - $(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \,\text{nand}\, \neg Q)$

Formas normais

Fórmulas da lógica proposicional podem ser expressas utilizando fórmulas com estruturas predefinidas. Tais estruturas são denominadas **formas normais**.

1. **Forma normal disjuntiva (fnd)**: disjunção de conjunção de literais.
2. **Forma normal conjuntiva (fnc)**: conjunção de disjunção de literais.

Literal

Símbolo proposicional ou sua negação.

Exemplos:

- Forma normal disjuntiva
  $H = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge \neg Q \wedge P) \vee (P \wedge S)$
- Forma normal conjuntiva
  $G = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q \vee P) \wedge (P \vee S)$

Exemplo: $H = (P \to Q) \wedge R$

1. Obtenção da tabela-verdade:

P	Q	R	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge R$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	T	T
F	F	F	T	F

Exemplo: $H = (P \to Q) \wedge R$

2. Extração das linhas que interpretam H como T (**fnd**):

P	Q	R	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge R$
T	T	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Exemplo: $H = (P \to Q) \wedge R$

3. Montagem das conjunções a partir das linhas extraídas (**fnd**):
   1. $\{I[P] = T,\ I[Q] = T,\ I[R] = T\}$:
      $P \wedge Q \wedge R$
   2. $\{I[P] = F,\ I[Q] = T,\ I[R] = T\}$:
      $\neg P \wedge Q \wedge R$
   3. $\{I[P] = F,\ I[Q] = F,\ I[R] = T\}$:
      $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$

Exemplo: $H = (P \to Q) \wedge R$

4. Obtenção da **fnd**:

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

Exemplo: $H = (P \to Q) \wedge R$

2. Extração das linhas que interpretam H como F (**fnc**):

P	Q	R	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge R$
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	F	T	F
F	F	F	T	F

Exemplo: $H = (P \to Q) \wedge R$

3. Montagem das disjunções a partir das linhas extraídas (**fnc**):
   1. $\{I[P] = T,\ I[Q] = T,\ I[R] = F\}$:
      $\neg P \vee \neg Q \vee R$
   2. $\{I[P] = T,\ I[Q] = F,\ I[R] = T\}$:
      $\neg P \vee Q \vee \neg R$
   3. $\{I[P] = T,\ I[Q] = F,\ I[R] = F\}$:
      $\neg P \vee Q \vee R$
   4. $\{I[P] = F,\ I[Q] = T,\ I[R] = F\}$:
      $P \vee \neg Q \vee R$
   5. $\{I[P] = F,\ I[Q] = F,\ I[R] = F\}$:
      $P \vee Q \vee R$

Obtenção da fnc e da fnd

Exemplo: $H = (P \to Q) \wedge R$

4. Obtenção da **fnc**:

$$(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$$

Exercícios

1. Obtenha a fnd e fnc de $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$
2. Dada a fórmula $H = ((P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q \leftrightarrow R)) \leftrightarrow (\neg R \wedge \neg P)$:
    1. Construa a fórmula equivalente utilizando apenas os conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$.
    2. Gere as fórmulas equivalentes na fnd e fnc.

Referências

1. PAIVA, J. G. S. Lógica para Computação. Introdução – notas de aula.
2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.
3. MARTINS, L. G. A, Apostila de Lógica Proposicional, FACOM, UFU.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU