Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação

Resolução

Prof. Renato Pimentel

2023/2

Sumário

Sistemas de dedução

- Estabelecem estruturas que permitem a representação e dedução do conhecimento
- Três sistemas:
  1. Sistema axiomático
  2. *Tableaux* semânticos
  3. Resolução

Resolução na lógica proposicional

- Sistema de **resolução**: método de prova criado por John Alan Robinson (1965);
- Inúmeras pesquisas e implementações utilizam tal método.
  - Programação lógica.

Forma de **conjuntos**: considere a fórmula H:

$$H = (P \lor \neg Q \lor R) \land (P \lor \neg Q) \land (P \lor P)$$

- *Conjunção de disjunções* (fnc)
- Representação na forma de conjuntos:

$$H = \{\{P, \neg Q, R\}, \{P, \neg Q\}, \{P\}\}$$

- **Cláusula** : disjunção de literais (conjunto finito de literais)
- **Literais Complementares** : ocorre quando um literal é a negação do outro

Resolvente

- Considere duas cláusulas
  $C_1 = \{A_1, \ldots, A_n\}$
  $C_2 = \{B_1, \ldots, B_n\}$
- Considere que ambas possuem literais complementares entre si
- Considere um literal λ em C_1, tal que o seu complementar $\neg\lambda$ esteja em C_2
- O **resolvente** de C_1 e C_2, chamado $\text{Res}(C_1, C_2)$, é definido por

$$\text{Res}(C_1, C_2) = (C_1 - \{\lambda\}) \cup (C_2 - \{\neg\lambda\})$$

- Se $\text{Res}(C_1, C_2) = \{\}$, tem-se um **resolvente vazio**.

Exemplo 1

Considere:

- $C_1 = \{P, \neg Q, R\}$
- $C_2 = \{\neg P, R\}$
- $\text{Res}(C_1,\ C_2) = \{\neg Q,\ R\}$

Considere:

- $C_1 = \{P\}$
- $C_2 = \{\neg P\}$
- $\text{Res}(C_1, C_2) = \{\}$

Exemplo 2

Considere:

- $C_1 = \{P, \neg Q\}$
- $C_2 = \{\neg P, Q\}$
- $\text{Res}(C_1, C_2) = \{\neg Q, Q\}$ ou $\{P, \neg P\}$
- **A regra resolvente elimina apenas um literal por vez!**

Resolução – Composição dos seguintes elementos:

- Alfabeto da lógica proposicional;
- Conjunto de cláusulas da lógica proposicional;
- Regra de resolução (resolvente).

Resolução define uma estrutura para representação e dedução de conhecimento

- Não existem axiomas;
- Apenas uma regra de inferência (regra de resolução);
- Prova de argumentos usando o conhecimento representado no sistema.

Regra de resolução

- Dadas duas cláusulas
  $C_1 = \{A_1, \ldots, A_n\}$
  $C_2 = \{B_1, \ldots, B_n\}$
- A regra de resolução aplicada a C_1 e C_2 é definida por:
  - Tendo C_1 e C_2, deduza $\text{Res}(C_1, C_2)$
- Prova da satisfazibilidade de um conjunto de cláusulas $\Rightarrow$ aplicação repetida da regra de resolução até obter uma cláusula vazia.
  - Expansão por resolução.

Exemplo

Considere $\{\{\neg P, Q, R\}, \{P, R\}, \{P, \neg R\}\}$

- Expansão:
  1. $\{\neg P, Q, R\}$
  2. $\{P, R\}$
  3. $\{P, \neg R\}$
  4. $\{Q, R\}$ [Res(1, 2)]
  5. $\{Q, P\}$ [Res(3, 4)]
  6. $\{P\}$ [Res(2, 3)]
- Nesse caso, não é possível obter a cláusula vazia.

Expansão por resolução

- Seja um conjunto de cláusulas $\{A_1, \ldots, A_n\}$
- Seja exp uma expansão por resolução de $\{A_1, \ldots, A_n\}$:
  1. A_1
  2. A_2

  $\vdots$

  n. A_n
- **Obs.**: Nessa expansão, as fórmulas $\{A_1, \ldots, A_n\}$ podem ser escritas em qualquer ordem
- Se exp* é a estrutura resultante da adição de Res(A_i, A_j), $(i, j) \leq n, i \neq j$, à expansão exp, então exp* também é uma expansão por resolução sobre $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Exemplo

Considere $\{\{\neg P, Q\}, \{P, R\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg Q, \neg R\}\}$

- Expansão:
  1. $\{\neg P, Q\}$
  2. $\{P, R\}$
  3. $\{P, \neg Q\}$
  4. $\{\neg Q, \neg R\}$
  5. $\{Q, R\}$ [Res(1, 2)]
  6. $\{P, R\}$ [Res(3, 5)]
  7. $\{Q, R\}$ [Res(1, 6)]
  8. $\{R, \neg R\}$ [Res(4, 7)]
- Tal resolução também não contém a cláusula vazia.
- Se expansão contém cláusula vazia: **expansão fechada**.

Consequência lógica na resolução

- Forma clausal de H: toda fórmula da lógica proposicional possui uma forma clausal associada (a partir de sua fnc)
  - Fórmula H_c: conjunção de cláusulas equivalente a H.
- Prova por Resolução:
  - Seja H uma fórmula e $\neg H_c$ a forma clausal associada a $\neg H$;
  - Uma prova de H por resolução é uma expansão fechada sobre $\neg H_c$;
  - Nesse caso H é um **teorema** do sistema de resolução.

Exemplo: prova por resolução

$$H = ((P_1 \lor P_2 \lor P_3) \land (P_1 \to P_4) \land (P_2 \to P_4) \land (P_3 \to P_4)) \to P_4$$

- $\neg H = \neg(((P_1 \lor P_2 \lor P_3) \land (P_1 \to P_4) \land (P_2 \to P_4) \land (P_3 \to P_4)) \to P_4)$
- $\neg H = \neg(\neg((P_1 \lor P_2 \lor P_3) \land (\neg P_1 \lor P_4) \land (\neg P_2 \lor P_4) \land (\neg P_3 \lor P_4)) \lor P_4)$
- $\neg H = ((P_1 \lor P_2 \lor P_3) \land (\neg P_1 \lor P_4) \land (\neg P_2 \lor P_4) \land (\neg P_3 \lor P_4)) \land \neg P_4$
- $\neg H = (P_1 \lor P_2 \lor P_3) \land (\neg P_1 \lor P_4) \land (\neg P_2 \lor P_4) \land (\neg P_3 \lor P_4) \land \neg P_4$
- Logo, $\neg H_c = \{\{P_1, P_2, P_3\}, \{\neg P_1, P_4\}, \{\neg P_2, P_4\}, \{\neg P_3, P_4\}, \{\neg P_4\}\}$.

- Expansão por resolução:
  1. $\{P_1, P_2, P_3\}$
  2. $\{\neg P_1, P_4\}$
  3. $\{\neg P_2, P_4\}$
  4. $\{\neg P_3, P_4\}$
  5. $\{\neg P_4\}$
  6. $\{P_2, P_3, P_4\}$ **[**$\text{Res}(1, 2)$**]**
  7. $\{P_3, P_4\}$ **[**$\text{Res}(3, 6)$**]**
  8. $\{P_4\}$ **[**$\text{Res}(4, 7)$**]**
  9. $\{\}$ **[**$\text{Res}(5, 8)$**]**
- Cláusula vazia: **expansão fechada** $\Rightarrow \vdash H$

Exercício

$$G = ((P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \rightarrow P_4) \wedge (P_2 \rightarrow P_4) \wedge (P_3 \rightarrow P_4)) \rightarrow P_3$$

Completude e correção

Seja H uma fórmula da lógica proposicional:

Teorema da completude

Se H é uma **tautologia**, então existe uma prova de H por resolução.

Teorema da correção

Se existe uma prova de H por resolução, então H é uma tautologia.

Consequência lógica de conjunto de hipóteses

Dada uma fórmula H, e um conjunto de hipóteses,
$\beta = \{A_1, \ldots, A_n\}$
Então H é uma **consequência lógica de** β, por resolução, se existe uma prova de $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow H$.
Notações:
$\beta \vdash H$
$\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash H$

Algoritmo da prova por resolução

Processo para se provar G, dado $\beta = \{A_1, \ldots, A_n\}$:

1. Produzir fórmula $H = (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow G$
2. Negar H: $\neg H$
3. Transformar $\neg H$ para a forma clausal: $\neg H_c$
4. Fazer a expansão por resolução.
5. Caso a expansão seja fechada, a prova foi concluída.

Exemplo 1

Considerando que

- Guga é determinado.
- Guga é inteligente.
- Se Guga é determinado e atleta, ele não é um perdedor.
- Se Guga é um amante do tênis, então é um atleta.
- Se Guga é inteligente, então é um amante do tênis.

Verificar se a afirmação "Guga não é um perdedor" é uma consequência lógica dos argumentos acima.

- Guga é determinado:
  P
- Guga é inteligente:
  Q
- Se Guga é determinado e atleta, ele não é um perdedor:
  $(P \wedge R) \rightarrow \neg P_1$
- Se Guga é um amante do tênis, então é um atleta:
  $Q_1 \rightarrow R$
- Se Guga é inteligente, então é um amante do tênis:
  $Q \rightarrow Q_1$
- Logo,
  $H = (P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \rightarrow \neg P_1$

- Obtenção da fórmula clausal $(\neg H_c)$ associada a $\neg H$:

$$
\begin{aligned}
\neg H = \neg((P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \rightarrow \neg P_1) \\
\Leftrightarrow \neg(\neg(P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \vee \neg P_1) \\
\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \wedge P_1 \\
\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge (\neg(P \wedge R) \vee \neg P_1) \wedge (\neg Q_1 \vee R) \wedge (\neg Q \vee Q_1) \wedge P_1 \\
\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge (\neg P \vee \neg R \vee \neg P_1) \wedge (\neg Q_1 \vee R) \wedge (\neg Q \vee Q_1) \wedge P_1
\end{aligned}
$$

- Na notação de conjuntos:

$$\neg H_c = \{\{P\}, \{Q\}, \{\neg P, \neg R, \neg P_1\}, \{\neg Q_1, R\}, \{\neg Q, Q_1\}, \{P_1\}\}$$

- Expansão por resolução de $\neg H_c$:
  1. $\{P\}$
  2. $\{Q\}$
  3. $\{\neg P, \neg R, \neg P_1\}$
  4. $\{\neg Q_1, R\}$
  5. $\{\neg Q, Q_1\}$
  6. $\{P_1\}$
  7. $\{\neg Q, R\}$ **[**Res(4, 5)**]**
  8. $\{\neg P, \neg P_1, \neg Q\}$ **[**Res(3, 7)**]**
  9. $\{\neg P_1, \neg Q\}$ **[**Res(1, 8)**]**
  10. $\{\neg Q\}$ **[**Res(6, 9)**]**
  11. $\{\}$ **[**Res(2, 10)**]**
- Cláusula vazia: **expansão fechada** $\Rightarrow \vdash H$. H é uma tautologia.

Exemplo 2

- Considere os argumentos:
  - Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece se o ingresso é barato.
  - Se Guga joga uma partida de tênis, o ingresso é barato.
- Verifique se a afirmação "Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece" é uma consequência lógica dos argumentos acima.

$$G = ((P \rightarrow (R \rightarrow Q)) \wedge (P \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

Conjunto insatisfazível

Um conjunto β, por exemplo, dado por:

$$\beta = \{\neg P \vee Q, \neg(Q \vee \neg R), R \rightarrow P_1, \neg(\neg P \vee P_1)\}$$

é **insatisfazível** ou **não-satisfazível**.
Basta verificar que a fórmula
$H = \neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg(Q \vee \neg R) \wedge (R \rightarrow P_1) \wedge \neg(\neg P \vee P_1))$
é uma tautologia (exercício). **Dica:** use a negação da forma clausal, $\neg H_c$.

Exercícios

- Faça as seguintes demonstrações utilizando resolução:
  - $P \rightarrow P$
  - $\neg(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge (\neg Q))$
  - $(P \vee (P \wedge \neg P)) \leftrightarrow P$
- Determine se os conjuntos a seguir são insatisfazíveis
  - $\{\neg(P \rightarrow Q), \neg P \vee Q\}$
  - $\{P \rightarrow Q, P \vee Q, \neg Q\}$

- Demonstre os seguintes teoremas usando resolução:
  - $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
  - $((A \rightarrow (A \rightarrow B)) \wedge A) \rightarrow B$
  - $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
  - $((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$
  - $((A \vee B) \vee C) \rightarrow (A \vee (B \vee C))$
  - $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$

- O funcionário é demitido se o chefe o indica ou os colegas o escolhem. Se o funcionário é demitido e chora, então ele conquista os clientes. Se o funcionário conquista os clientes, ele não vai embora. O chefe indicou um funcionário e ele foi embora. Logo, o funcionário não chorou.
- Se o programa é bom ou passa no horário nobre, o público assiste. Se o público assiste e gosta, então a audiência é alta. Se a audiência é alta, a propaganda é cara. O programa passa no horário nobre, mas a propaganda é barata. Logo, o público não gosta do programa.
- Se Joana sente dor estômago, ela fica irritada. Se Joana toma remédio para dor de cabeça, ela sente dor de estômago. Joana não está irritada. Logo, ela não tomou remédio para dor de cabeça.

Referências

1. PAIVA, J. G. S. Lógica para Computação. Introdução – notas de aula.
2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.
3. MARTINS, L. G. A, Apostila de Lógica Proposicional, FACOM, UFU.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU
LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU