Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação

Semântica na lógica de predicados

Prof. Renato Pimentel

2023/2

Sumário

Introdução

Objetivo

Associar **significado** aos símbolos das fórmulas da lógica de predicados

Definições mais elaboradas:

1. Quantificadores
2. Variáveis
3. Funções
4. Predicados

Exemplo 1

- $I[q(x)] = T$, se, e somente se $I[x]$ é par.
  - Domínio de I: **números** (interpretação no conjunto de números).
- Todo número é par
  - $I[x]$: dado uma variável x, $I[x] =$ número
  - q: símbolo de predicado tal que
    $I[q(x)] = T$, se e somente se $I[x]$ é par
    Resultado: $(\forall x)q(x)$

Exemplo 2

$H = (\forall x)(\exists y)p(x, y)$

- Significado de p: suponha $I[p] =<$:
  $I[p(x, y)] = T \Leftrightarrow I[x] < I[y] \Leftrightarrow x_I < y_I$
- $I[H] =$"para todo x_I", "existe y_I" tal que $x_I < y_I$

Qual a interpretação de H, true ou false?

- Ainda não é possível determinar se $I[H]$ é T ou F:
  - O que são x e y? Suponha que sejam números.
  - Que números x_I e y_I serão considerados? (Domínio U)

- $U = [0, \infty)$
  - $I[H] = T$, pois para todo x_I, $x_I \in [0, \infty)$, existe y_I, $y_I \in [0, \infty)$, tal que $x_I < y_I$.
- $U = (-\infty, 0]$
  - $I[H] = F$, pois **é falso que** para todo x_I, $x_I \in (-\infty, 0]$, existe y_I, $y_I \in (-\infty, 0]$, tal que $x_I < y_I$.

Se $x_I = 0$, não existe $y_I \in (-\infty, 0]$, tal que $x_I < y_I$.

- Nesse caso, não é necessário ter os resultados de $I[x]$ e $I[y]$ para se determinar $I[H]$.
  - Isso ocorre porque x e y *não são símbolos livres*.
  - Só é necessário definir a interpretação de p.

Exemplo 3

$G = (\forall x)p(x, y)$

- Símbolos livres: p, y
- Para determinar $J[G]$, é necessário definir $J[p]$ e $J[y]$.
- Considerando J em $U = (-\infty, 0]$ tal que $J[p] = \leq eJ[y] = -5$:
  - Neste caso, $J[G] = F$;
- Considerando J em $U = (-\infty, 0]$ tal que $J[p] = \leq$ e $J[y] = 0$:
  - Neste caso, $J[G] = T$.

Exemplo 4

$U = \{\text{José}, \text{Maria}, \text{Ana}, \text{Rodrigo}, \text{João}, \text{Júlia}\}$

- Conjunto de pessoas que estão cursando Lógica.
- Interpretação J em U:
  É possível escolher constantes a, b, c, a_1 , b_1, c_1 tais que:
  - $I[a] =$José
  - $I[b] =$Maria
  - $I[c] =$Ana
  - $I[a_1] =$Rodrigo
  - $I[b_1] =$João
  - $I[c_1] =$Júlia

$U = \{\text{José}, \text{Maria}, \text{Ana}, \text{Rodrigo}, \text{João}, \text{Júlia}\}$

- Tendo escolhido as constantes, podemos representar outras sentenças:
  - $I[p(x, y)] = T$ se, e somente se, $I[x]$ gosta de $I[y]$;
  - $I[q(x)] = T$ se, e somente se, $I[x]$ é inteligente;
  - $I[f(x)] = I[y]$ se, e somente se, $I[y]$ é o pai de $I[x]$.

$U = \{\text{José}, \text{Maria}, \text{Ana}, \text{Rodrigo}, \text{João}, \text{Júlia}\}$

- Se José gosta de Maria:
  $I[p(a, b)] = T$
- Se Ana é inteligente:
  $I[q(c)] = T$
- Se Rodrigo é pai de Júlia:
  $I[f(c_1)] = \text{Rodrigo} = I[a_1]$
- "todo aluno que está cursando Lógica é inteligente":
  $(\forall x)q(x)$

$U = \{\text{José}, \text{Maria}, \text{Ana}, \text{Rodrigo}, \text{João}, \text{Júlia}\}$

- Na fórmula $(\forall x)q(x)$, x pode ser substituído por qualquer elemento do domínio.
  - Variáveis que são argumentos dos predicados e funções são elementos que podem ser substituídos pelas constantes – elementos do domínio.

- **Quantificação universal**: **conjunção** sobre elementos do domínio: $I[(\forall x)q(x)] = T$ se, e somente se, $I[q(a)] = T$ **e** $I[q(b)] = T$ **e** ... **e** $I[q(c_1)] = T$.

- Analogamente, na **Quantificação existencial**: **disjunção** sobre elementos do domínio: $I[(\exists x)q(x)] = T$ se, e somente se, $I[q(a)] = T$ **ou** $I[q(b)] = T$ **ou** ... **ou** $I[q(c_1)] = T$.

Conjunto-verdade

Considerando U um domínio, e $p(x)$ um predicado aplicado em U, o **conjunto-verdade** de $p(x)$, indicado por V_p, é dado como

$$V_p = \{x | x \in U \land p(x) = T\}$$

ou

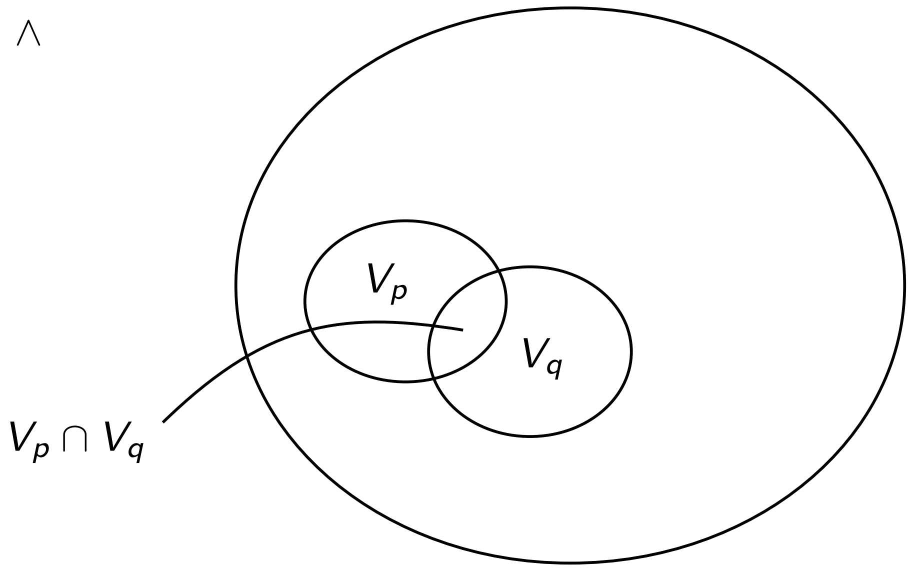
$$V_p = \{x \in U | p(x)\}$$

Se $p(x)$ é um predicado definido em U, então três casos podem ocorrer:

1. Condição (propriedade) **universal**: $p(x) = T$ para todo x em U.
   Conjunto-verdade de $p(x)$ é igual ao próprio U.
2. Condição (propriedade) **existencial**: $p(x)$ é verdadeira para alguns x em U.
   Conjunto-verdade de $p(x)$ é um subconjunto de U.
3. Condição (propriedade) **impossível**: $p(x)$ é falsa para todos os x em U.
   Conjunto-verdade de $p(x)$ é vazio.

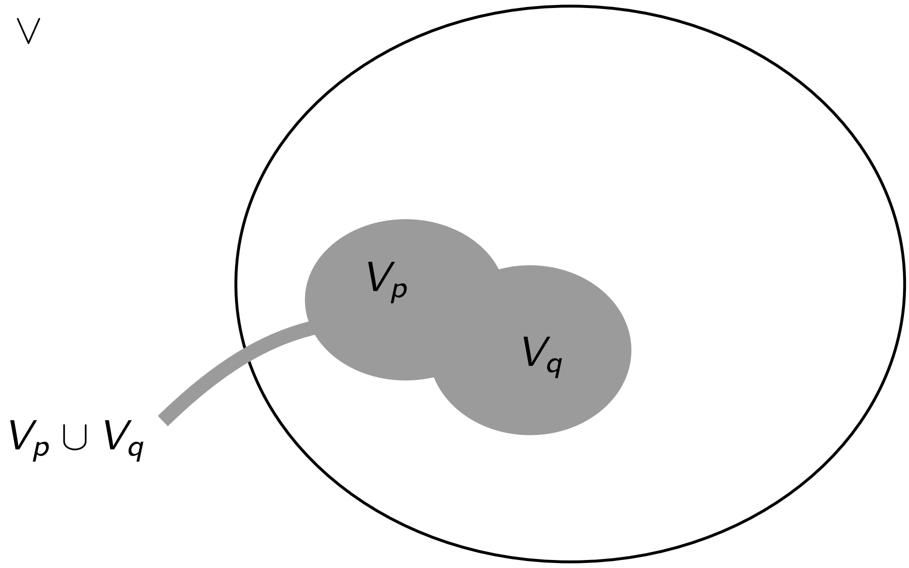
Conjuntos-verdade e conectivos

O conectivo $\wedge$



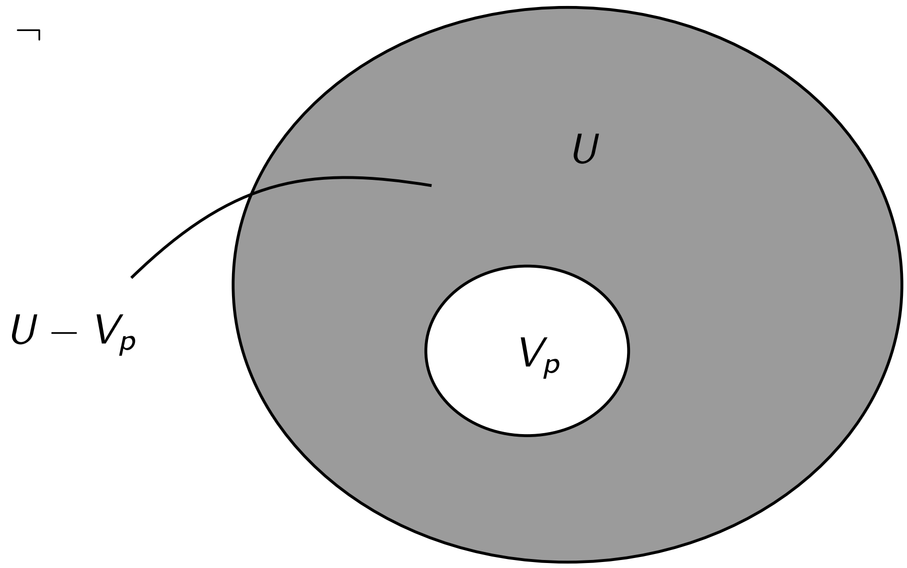
$$V_{p\wedge q} = V_p \cap V_q = \{x \in U | p(x)\} \cap \{x \in U | q(x)\}$$

O conectivo $\vee$



$$V_{p \vee q} = V_p \cup V_q = \{x \in U | p(x)\} \cup \{x \in U | q(x)\}$$

O conectivo $\neg$



$$V_{\neg p} = U - V_p = U - \{x \in U | p(x)\}$$

Para os conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, usamos as propriedades de substituição:

- O conectivo $\rightarrow$:

$$V_{p\rightarrow q} = V_{\neg p \vee q} = (U - V_p) \cup V_q$$

- O conectivo $\leftrightarrow$:

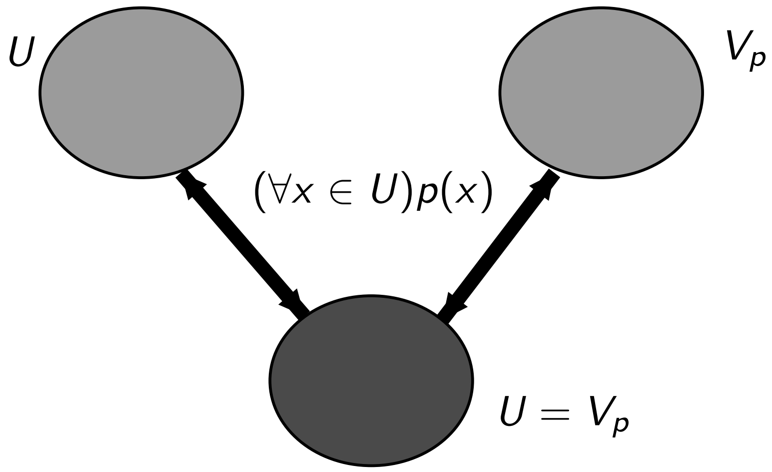
$$\begin{aligned} V_{p\leftrightarrow q} &= V_{p\rightarrow q} \cap V_{q\rightarrow p} \\ &= V_{\neg p\vee q} \cap V_{\neg q \vee p} \\ &= ((U - V_p) \cup V_q) \cap ((U - V_q) \cup V_p) \end{aligned}$$

Predicados com aridade maior que 1:

$$V_p = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n | p(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

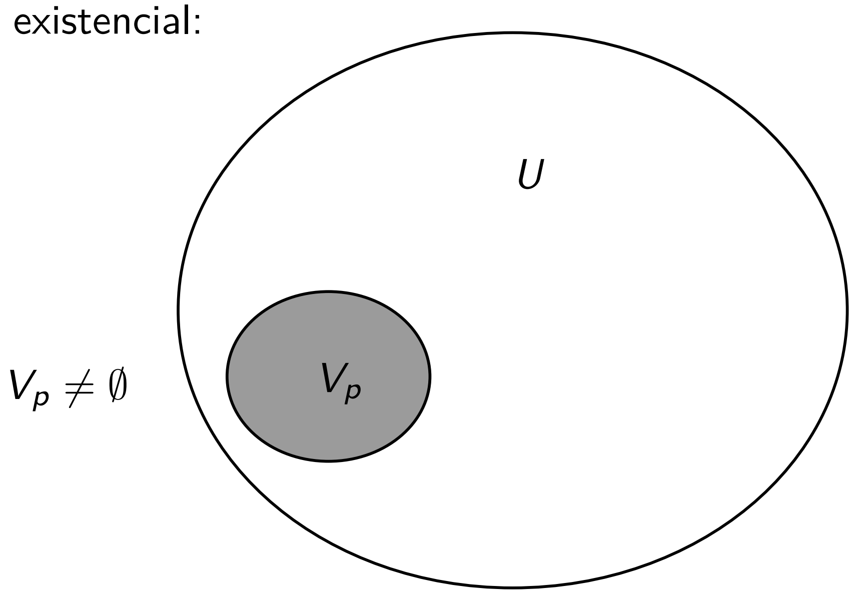
Quantificador universal:

$$(\forall x \in U)p(x) \Leftrightarrow V_p = U$$



$$(\forall x \in U)p(x) \Leftrightarrow p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)$$

Quantificador existencial:



$$(\exists x \in U)p(x) \Leftrightarrow p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n)$$

Resumo

- Para representar uma sentença como uma fórmula da lógica de predicados:
  - Domínio da interpretação;
  - Constantes na linguagem: nomes no domínio da interpretação;
  - Símbolos do predicado e de função: relações de predicado e funcionais entre os elementos do domínio.
- Para interpretar uma fórmula H com quantificadores, deve-se observar:
  - Domínio da interpretação;
  - Valor da interpretação dos símbolos livres de H.

Interpretação das variáveis, funções e predicados

Seja U um conjunto não-vazio, e I uma função de interpretação em U. Tem-se que:

- Domínio de I: conjunto dos símbolos de função, predicado e das expressões.
- Para toda variável x, se $I[x] = x_I$, então $x_I \in U$.
- Para toda função f, n-ária, se $I[f] = f_I$, f_I é uma função n-ária em U ($f_I : U^n \to U$).
- Para todo predicado p, n-ário, se $I[p] = p_I$, p_I é um predicado n-ário em U ($p_I : U^n \to \{T, F\}$).
- Se E é uma expressão, $I[E]$ é definida por um conjunto de regras semânticas.

Observações

- A interpretação de uma função zero-ária é igual à interpretação de uma constante.
- O resultado da interpretação de uma variável é um elemento do domínio.
- A interpretação de um predicado zero-ário é igual à interpretação de um símbolo proposicional.

Quantificadores

- **Enunciado categórico**: afirmação em linguagem natural que possui estrutura relativamente formal:
  - Todo S é P.
  - Nenhum S é P.
  - Algum S é P.
  - Algum S não é P.
- Essas afirmações podem ser lidas como
  - Todo x do domínio que é S, também é P.
  - Nenhum x do domínio que é S também é P.
  - Algum x do domínio que é S também é P.
  - Algum x do domínio que é S também não é P.

- Por sua vez, essas afirmações também podem ser lidas como:
  - Para todo x do domínio, se x é S, então x é P.
  - Para todo x do domínio, se x é S então não é P.
  - Existe pelo menos um x do domínio tal que x é S e x é P.
  - Existe pelo menos um x do domínio tal que x é S e x não é P.
- Finalmente, teremos:
  - $(\forall x)(s(x) \rightarrow p(x))$
  - $(\forall x)(s(x) \rightarrow \neg p(x))$
  - $(\exists x)(s(x) \wedge p(x))$
  - $(\exists x)(s(x) \wedge \neg p(x))$

Exercícios I

1. Traduza as seguintes frases para a lógica de predicados, definindo todos os elementos necessários para a interpretação:
   - Todos os estudantes são inteligentes
   - Alguns estudantes inteligentes gostam de música
   - Todos que gostam de música são estudantes e cantores

Exercícios II

2. Supondo os seguintes símbolos:
   - $A(x, y) =$"x ama y"
   - $j =$"João", $c =$"Cátia"
   - $V(x) =$"x é vistoso", $H(x) =$"x é um homem", $M(x) =$"x é uma mulher", $B(x) =$"x é bonita"

   Dê versões para o português para as fórmulas apresentadas abaixo:
   1. $V(j) \wedge A(c, j)$
   2. $(\forall x)(H(x) \to V(x))$
   3. $(\forall x)(M(x) \to (\forall y)(A(x, y) \to (H(y) \wedge V(y))))$
   4. $(\exists x)(H(x) \wedge V(x) \wedge A(x, c))$
   5. $(\exists x)(M(x) \wedge B(x) \wedge (\forall y)(A(x, y) \to (V(y) \wedge H(y))))$
   6. $(\exists x)(M(x) \wedge B(x) \to A(j, x))$

Exercícios III

3. Interpretando as letras p, q, r e s como os predicados "É uma rã", "É verde", "É saltitante", "É iridescente", formalize as seguintes sentenças:
   1. Todas as rãs são verdes.
   2. Nenhuma rã é verde.
   3. Algumas rãs são verdes.
   4. Algumas coisas são verdes e algumas não são.
   5. Não existem rãs iridescentes.
   6. Algumas coisas são verdes e iridescentes simultaneamente.
   7. Qualquer coisa ou é rã ou é iridescente.

Seja E uma expressão e I uma interpretação sobre o domínio U.
A interpretação de E conforme I, indicada por $I[E]$, é determinada pelas regras:

- Se $E = \text{false}$, então $I[E] = I[\text{false}] = F$
- Se $E = f(t_1, \ldots, t_n)$, onde $f(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo, então $I[E] = I[f(t_1, \ldots, t_n)] = f_I(t_{1I}, \ldots, t_{nI})$, onde $I[f] = f_I$ e para todo termo t_i , $I[t_i] = t_{iI}$.
- Se $E = p(t_1, \ldots, t_n)$, onde $p(t_1, \ldots, t_n)$ é um átomo, então $I[E] = I[p(t_1, \ldots, t_n)] = p_I(t_{1I}, \ldots, t_{nI})$, onde $I[p] = p_I$ e para todo termo t_i , $I[t_i] = t_{iI}$.

- Se $E = \neg H$, onde H é uma fórmula, então $I[E] = I[\neg H] = T$ se $I[H] = F$ e $I[E] = I[\neg H] = F$ se $I[H] = T$.
- Se $E = H \lor G$, onde H e G são duas fórmulas, então $I[E] = I[H \lor G] = T$ se $I[H] = T$ e/ou $I[G] = T$ e $I[E] = I[H \lor G] = F$ se $I[H] = I[G] = F$.
- Para os outros conectivos, seguem as mesmas regras da lógica proposicional.

Exemplo 1

Considere as fórmulas

$$H = (\neg p(x, y, a, b)) \rightarrow r(f(x), g(y))$$
$$G = p(x, y, a, b) \rightarrow (q(x, y) \wedge r(y, a))$$

Seja I interpretação sobre o domínio dos números naturais, tal que:

- $I[x] = 3, I[y] = 2, I[a] = 0, I[b] = 1$
- $I[p(x, y, z, w)] = T \Leftrightarrow x_I \cdot y_I > z_I \cdot w_I$
- $I[q(x, y)] = T \Leftrightarrow x_I < y_I$
- $I[r(x, y)] = T \Leftrightarrow x_I > y_I$
- $I[f(x)] = (x_I + 1)$
- $I[g(x)] = (x_I - 2)$

A interpretação de H e G segundo I é dada pela seguinte tabela:

Sintaxe	x	y	a	b	$p(x, y, a, b)$	$f(x)$	$g(y)$	$q(x, y)$	$r(y, a)$	H	G
Semântica	3	2	0	1	T	4	0	F	T	T	F

Paradigma da interpretação estendida:
Considere como exemplo uma interpretação I tal que, dadas 2 variáveis x e y,

$$I[x] = 5, \qquad I[y] = 1$$

Uma nova interpretação sobre x poderia ser feita. (Analogia: um segundo indivíduo convence o primeiro – que faz a interpretação – de que x deve ser interpretado como 7, e não 5). Esta nova interpretação do valor semântico de x, é denotada por $< x \leftarrow 7 > I$.

Sendo assim, mesmo que $I[x] = 5$:

$$< x \leftarrow 7 > I[x] = 7, \qquad < x \leftarrow 7 > I[y] = 1$$

- Uma outra interpretação pode ser feita sobre x novamente, resultando em, por exemplo, $< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I$.
  Assim, mesmo com $I[x] = 5$,

$$< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[x] = 8 \qquad < x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[y] = 1$$

- Uma terceira pode ser feita sobre y resultando em $< y \leftarrow 4 >< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I$.
  Assim, mesmo com $I[x] = 5$, e $I[y] = 1$,

$$< y \leftarrow 4 >< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[x] = 8$$
$$< y \leftarrow 4 >< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[y] = 4$$

- Extensão mais à esquerda tem precedência.
- Quando não há extensões, considera-se a interpretação original.

Exemplo

$$I[x] = 4, \quad I[a] = 5, \quad I[y] = 4, \quad I[f] = +, \quad I[p] =>$$

- $< x \leftarrow 2 > I[y] = 4$,
- $< x \leftarrow 2 > I[f] = +$,
- $< x \leftarrow 2 > I[x] = 2$,
- $< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[y] = 9$,
- $< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[x] = 2$,
- $< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[y] = 9$,
- $< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[x] = 7$,
- $< y \leftarrow 1 >< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[y] = 1$

Interpretação de fórmulas com quantificadores

Seja H uma fórmula, x uma variável e I uma interpretação sobre U. $I[(\forall x)H]$ e $I[(\exists x)H]$ seguem as regras:

- $I[(\forall x)H] = T \Leftrightarrow \forall d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = T$
- $I[(\forall x)H] = F \Leftrightarrow \exists d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = F$
- $I[(\exists x)H] = T \Leftrightarrow \exists d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = T$
- $I[(\exists x)H] = F \Leftrightarrow \forall d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = F$

Exemplo 1

Seja I sobre os números naturais, tal que

$$I[x] = 3, \quad I[a] = 5, \quad I[y] = 4, \quad I[f] = +, \quad I[p] =<$$

Considere $G = (\forall x)p(x, y)$
Dada I acima, $I[G] = T$ ou F?

$$\begin{aligned}
I[G] = T &\Leftrightarrow (\forall x)p(x, y) = T \\
&\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N}; < x \leftarrow d > I[p(x, y)] = T \\
&\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N}; d < 4 \text{ é verdadeiro.}
\end{aligned}$$

Logo, considerando I, $I[G] = F$.

Exemplo 2

Seja I sobre os números naturais, tal que

$$I[x] = 3, \quad I[a] = 5, \quad I[y] = 4, \quad I[f] = +, \quad I[p] =<$$

Considere $E = (\forall x)(\exists y)p(x, y)$
Dada I acima, $I[E] = T$ ou F?

$$\begin{aligned}
I[E] = T &\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)p(x, y) = T \\
&\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N}; < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x, y)] = T \\
&\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{N}; < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x, y)] = T \\
&\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{N}; d < c \text{ é verdadeiro.}
\end{aligned}$$

Logo, considerando I, $I[E] = T$.

Exemplo 3

Seja I sobre os números naturais, tal que

$$I[x] = 3, \quad I[a] = 5, \quad I[y] = 4, \quad I[f] = +, \quad I[p] = <$$

Considere $E_1 = E \wedge G$, onde

$$E = (\forall x)(\exists y)p(x, y)$$
$$G = (\forall x)p(x, y)$$

Neste caso, temos que $I[E_1] = F$, pois

$$I[E] = F \qquad I[G] = T$$

Exercícios I

1. Seja I sobre os números racionais diferentes de zero:

$$I[a] = 1, \quad I[b] = 25, \quad I[x] = 13, \quad I[y] = 77, \quad I[f] = /, \quad I[p] = <$$

Interprete as seguintes fórmulas:

1. $H = (\forall x)p(x, y)$
2. $H = (\exists x)p(x, y)$
3. $G = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(b, f(a, b))$
4. $H = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(f(a, b), b)$
5. $H = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(x, y)$
6. $H = (\forall x)((\exists y)p(x, y) \rightarrow p(x, y))$
7. $E = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(f(a, b), x)$

Exercícios II

2. Usando os seguintes símbolos:
   $p(x) =$"x é uma pessoa" $q(x) =$"x é um período de tempo"
   $r(x, y) =$"x é enganado por y"

   Formalize os seguintes enunciados, no domínio formado pelo mundo inteiro:

   1. Você pode enganar algumas pessoas durante todo o tempo.
   2. Você pode enganar todas pessoas durante algum tempo.
   3. Você não pode enganar todas as pessoas durante todo o tempo.

Exercícios III

3. Se possível, determine interpretações que interpretem as fórmulas abaixo como verdadeiras e como falsas:

   1. $(\forall x)(\exists y)p(x, y, z) \rightarrow (\exists y)(\forall z)p(x, y, z)$
   2. $(\forall x)p(x) \leftrightarrow (\exists y)q(y)$
   3. $(\forall x)(\forall x)p(x, y) \rightarrow (\exists y)q(y)$

Exercícios IV

4. Traduza as sentenças a seguir para a lógica de predicados:
   1. As filhas de Carlos sao lindas e inteligentes, e todos os rapazes da Computação querem namorá-las
   2. Toda pessoa ama alguém, mas não existe ninguém que ame todas
   3. Não existe conjunto que contém a si próprio
   4. Todo irmão do pai de Pedro é seu tio
   5. Se alguém não ama ninguém, todos não amam todos
   6. Quem não se ama não ama ninguém
   7. Nenhum filho adolescente de Maria gosta de estudar

Referências

1. PAIVA, J. G. S. Lógica para Computação. Introdução – notas de aula.
2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU
LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU