Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação

Semântica na lógica proposicional

Prof. Renato Pimentel

2023/2

Sumário

Significados

- **Semântica**: associação de um *significado* a cada objeto da lógica
- Mesma fórmula $\Rightarrow$ diferentes significados
- Exemplo:

$$P \rightarrow Q$$

  - P: "Está chovendo";
  - Q: "A rua está molhada".
- As fórmulas podem ser *verdadeiras* ou *falsas*
  - Dependência de vários fatores

Programação

- Mundo lógico
  - Mundo sintático – símbolos do alfabeto
    - **Fórmulas** – concatenações de símbolos
  - Mundo semântico – *significado* dos símbolos e fórmulas
- Importância na computação – computador é uma máquina estritamente sintática.
  - É necessário fornecer um significado aos símbolos por ela manipulada
- **Programação** – tradução de um conhecimento semântico para um programa sintático

Interpretação

Associação de um valor verdade para cada fórmula da Lógica Proposicional

- **Domínio**: conjunto das fórmulas da lógica proposicional
- **Contradomínio**: conjunto $\{T, F\}$ (função binária)
- Valores:
  - Dado símbolo proposicional P, então $I[P] \in \{T, F\}$
  - $I[\text{true}] = T$, $I[\text{false}] = F$
- Lógica **bivalente** – simplificação do mundo real.

Interpretação de fórmulas

- **Fórmulas:** concatenação de símbolos.

A interpretação das fórmulas consiste na interpretação de seus símbolos

- Conjunto de regras: de acordo com símbolos proposicionais, de verdade e conectivos lógicos na fórmula.

Regras de interpretação I

Dadas uma fórmula E e uma interpretação I:

1. Se E é do tipo $\check{P}$ (um símbolo proposicional), então $I[E] = I[\check{P}]$, e $I[\check{P}] \in \{T, F\}$;
2. Se E é true, então $I[E] = I[\text{true}] = T$;
3. Se E é false, então $I[E] = I[\text{false}] = F$;
4. Se H é uma fórmula e E é do tipo $\neg H$:
   - $I[E] = I[\neg H] = T$ se $I[H] = F$;
   - $I[E] = I[\neg H] = F$ se $I[H] = T$;

Regras de interpretação II

5. Se H e G são fórmulas e E é do tipo $(H \vee G)$:
   - $I[E] = I[H \vee G] = T$ se $I[H] = T$ e/ou $I[G] = T$.
   - $I[E] = I[H \vee G] = F$ se $I[H] = F$ **e** $I[G] = F$.
6. Se H e G são fórmulas e E é do tipo $(H \wedge G)$:
   - $I[E] = I[H \wedge G] = T$ se $I[H] = T$ **e** $I[G] = T$.
   - $I[E] = I[H \wedge G] = F$ se $I[H] = F$ e/ou $I[G] = F$.

Regras de interpretação III

7. Se H e G são fórmulas e E é do tipo $(H \rightarrow G)$:
   - $I[E] = I[H \rightarrow G] = T$ se $I[H] = F$ e/ou $I[G] = T$.
   - $I[E] = I[H \rightarrow G] = F$ se $I[H] = T$ **e** $I[G] = F$.
8. Se H e G são fórmulas e E é do tipo $(H \leftrightarrow G)$:
   - $I[E] = I[H \leftrightarrow G] = T$ se $I[H] = I[G]$;
   - $I[E] = I[H \leftrightarrow G] = F$ se $I[H] \neq I[G]$.

Exercício

Interprete a letra sentencial C como "Está chovendo", e N como "Está nevando" e expresse a forma de cada sentença na notação do cálculo proposicional:

- Está chovendo.
- Não está chovendo.
- Está chovendo ou nevando.
- Está chovendo e nevando.
- Está chovendo mas não está nevando.
- Não é o caso que está chovendo e nevando.
- Se não está chovendo, então está nevando.
- Não é o caso que se está chovendo então está nevando.

- Está chovendo se e somente se não está nevando.
- Não é o caso que está chovendo ou nevando.
- Se está nevando e chovendo, então está nevando.
- Ou está chovendo, ou está nevando e chovendo.
- Ou está chovendo e nevando, ou está nevando mas não está chovendo.

Exercício

Dadas as proposições

- P: Gosto de viajar
- Q: Visitei o Chile,

represente as seguintes proposições verbalmente:

- $P \leftrightarrow Q$
- $\neg Q \rightarrow \neg P$
- $(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P$
- $Q \rightarrow \neg P$
- $\neg(P \rightarrow Q)$

Exercício

Descreva as sentenças abaixo em termos de proposições simples e operadores lógicos

- Se elefantes podem subir em arvores, então 3 é número par
- $\pi > 0$ se e somente se não é verdade que $\pi > 1$
- Se as laranjas são amarelas, então os morangos são vermelhos
- É falso que se Montreal é a capital do Canadá, então a próxima copa será realizada no Brasil
- Se é falso que Montreal é a capital do Canadá, então a próxima copa será realizada no Brasil

Exemplo

Sejam P e Q duas proposições. Demonstrar com a ajuda da definição de interpretação dos conectivos que: $(P \to Q)$ equivale a $(Q \vee \neg P)$.

- **Para** $I[P \to Q] = T$: $I[P] = F$ e/ou $I[Q] = T$
  - Se $I[P] = F \Rightarrow I[\neg P] = T \Rightarrow I[Q \vee \neg P] = T$;
  - Se $I[Q] = T \Rightarrow I[Q \vee \neg P] = T$.
- **Para** $I[P \to Q] = F$: $I[P] = T$ e $I[Q] = F$
  - Se $I[P] = T$ e $I[Q] = F \Rightarrow I[\neg P] = F$ e $I[Q] = F \Rightarrow I[Q \vee \neg P] = F$

Exercício

Sejam P e Q duas proposições. Demonstrar com a ajuda da definição de interpretação dos conectivos que:

- $P \land Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \lor \neg Q)$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \land (Q \to P)$
- $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg P)$

Conectivos

- Não se faz interpretação dos conectivos lógicos isoladamente
  - Tais símbolos não fazem parte do domínio da função I
- No entanto, analisa-se as possibilidades de significados considerando a utilização desses conectivos
- Tais possibilidades são representadas em uma **tabela-verdade** associada aos conectivos proposicionais

Tabela-verdade dos conectivos

H	G	$H \wedge G$	$H \vee G$	$H \rightarrow G$	$H \leftrightarrow G$	$\neg H$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

Interpretação de fórmulas

- Existem também tabelas-verdade associadas às fórmulas da lógica
- Nesse caso, elas são obtidas das tabelas verdade dos conectivos proposicionais

Exemplo

$H = ((\neg P) \vee Q) \rightarrow (Q \wedge P)$

P	Q	$\neg P$	$(\neg P) \vee Q$	$Q \wedge P$	H
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F

Exercício

Defina os resultados abaixo de acordo com as interpretações:

- $E = ((\neg P) \vee (\neg Q)) \rightarrow R$,
  $H = (\text{false} \rightarrow P)$
  - $I[P] = T$, $I[Q] = F$, $I[R] = T$
  - $J[P] = F$, $J[Q] = T$, $J[R] = F$
- $E = ((\neg P) \wedge Q) \rightarrow (R \vee P)$
  - Todas as interpretações

Exercício

Construa as tabelas verdade para as seguintes fórmulas

- $\neg((P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg R)$
- $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
- $(P \wedge Q \wedge R) \vee \neg(\neg Q \vee P) \vee (P \wedge \neg R)) \rightarrow (R \vee \neg P)$

O conectivo $\neg$

- Expressa uma negação que nem sempre ocorre nas línguas naturais. Ex.:
  - João é rico
  - *Negação*: João não é rico
- Nem sempre existe uma correspondência entre a negação nas linguagens naturais e na lógica. Exs.:
  - Carlos é feliz
  - Ana é namorada de Fábio

O conectivo $\vee$

- Nem sempre é equivalente ao **ou** das línguas naturais:
  - Termos podem não ser relacionados
  - Não existe exclusividade
    - 3 possibilidades possíveis, e não 2 como nas línguas naturais
- Exemplos:
  - Hoje é quinta-feira ou o carro é azul
  - Vou ao cinema ou ao teatro
  - Está chovendo ou fazendo sol
  - Carla está grávida de menino ou menina

O conectivo $\wedge$

- Pode ser representado, em línguas naturais como
  - e, mas, todavia
  - Nuances perdem o significado quando a sentença é traduzida para a lógica
- *Comutatividade*: nem sempre garantida nas línguas naturais (sem relações temporais ou causais). Exs.:
  - Tiago pulou na piscina e se molhou
  - Laura estudou para a prova e tirou uma boa nota

O conectivo $\rightarrow$

- Implicação condicional
  - Hipótese resultando em uma conclusão
  - Obrigação, contrato
- Exemplos
  - "Se eu for eleito, diminuirei os impostos"
  - "Se você tirar nota 10 no exame final, terá conceito A"
  - "Se x é um número real maior que 10, então x^2 é um número real maior que 100"

Análise

"Se eu passar na prova, vou viajar."

Podemos formalizá-la como $A \rightarrow B$.
Considerando todas as combinações entre verdadeiro e falso para as letras sentenciais A e B:

1. A é verdadeiro e B também o é. (linha 1 da tabela-verdade)
   Situação: Passei na prova e viajei. Logo, a afirmação é verdadeira.
2. A é verdadeiro e B é falso. (linha 2 da tabela-verdade)
   Situação: Passei na prova e não viajei. Logo, a afirmação é falsa, pois eu havia afirmado que, se passasse na prova, viajaria.
3. A é falso e B é verdadeiro. (linha 3 da tabela-verdade)
   Situação: Não passei na prova e viajei. Logo, a afirmação é verdadeira, pois eu não afirmei que, se não passasse na prova, não iria viajar
4. A é falso e B também o é. (linha 4 da tabela-verdade)
   Situação: Não passei na prova e não viajei. Logo, a afirmação é verdadeira

Outras interpretações:

- "Maria vai conseguir um bom emprego quando aprender Matemática."
- "Para conseguir um bom emprego, é suficiente que Maria aprenda Matemática."
- "Maria vai conseguir um bom emprego, a menos que não aprenda Matemática."

Todas representam a seguinte frase:

Se Maria aprender Matemática, então conseguirá um bom emprego

- P: Maria aprende Matemática
- Q: Maria consegue um bom emprego

$$P \rightarrow Q$$

- O conectivo $\rightarrow$ não expressa a semântica da causalidade
- Em outras palavras, não é necessária a relação de causa e efeito para que $I[H \rightarrow G] = T$
  - H não é causa de G
- Isso ocorre porque
  - Se $I[G] = T$, $I[H \rightarrow G] = T$, independente do valor de $I[H]$.
  - Se $I[H] = F$, $I[H \rightarrow G] = T$, independente do valor de $I[G]$.

- Exemplo:
  - Se hoje é sexta-feira, então $2 + 3 = 5$
  - Se hoje é sexta-feira, então $2 + 3 = 6$
- Não expressamos essas condicionais na língua portuguesa (não existe relação entre hipótese e conclusão).
- No raciocínio lógico, a implicação condicional tem um aspecto mais geral.
- A lógica não tem como base nenhuma linguagem natural, porque é uma linguagem artificial.

$\rightarrow$ e proposições correlatas

Dada a proposição $P \rightarrow Q$:

- A proposição $Q \rightarrow P$ é chamada **oposta**.
- A proposição $\neg Q \rightarrow \neg P$ é chamada **contrapositiva**.
- A proposição $\neg P \rightarrow \neg Q$ é chamada **inversa**.

Exercício

Verifique se a oposta, contrapositiva e inversa possuem os mesmos valores de tabela verdade de $P \rightarrow Q$

- A contrapositiva tem os mesmos valores de tabela verdade da proposição original
  - Quando isso ocorre, chamamos as proposições de **equivalentes**.
- A oposta e a inversa são equivalentes

O conectivo $\leftrightarrow$

- Chamado de **bicondicional**
- Representa a igualdade na interpretação das duas fórmulas envolvidas:
  - "Você pode tomar o avião se e somente se você comprou uma passagem"
  - "Se você pode tomar o avião, comprou passagem"
  - "Se comprou passagem, você pode tomar o avião"

- Nem sempre estão explícitas nas linguagens naturais.
- Raramente utilizadas: frequentemente expressas usando construções como **"se, então"** ou **"somente se"** – restante fica implícito.

"Se terminar o almoço, então você pode comer a sobremesa"

Necessidade

Pré-requisito para que um fato ocorra.

- $P \rightarrow Q$: Q indica o que é necessário para que P ocorra (Se Q é F, então P também deve ser F);
- Sua veracidade ($Q = T$) não é suficiente para garantir que o fato também seja verdade ($P = T$).

Suficiência

Conjunto de todos os pré-requisitos necessários para que um fato ocorra.

- Veracidade desse conjunto garante a veracidade do fato;
- $P \rightarrow Q$: P indica o que é suficiente para que Q ocorra.

Considerando duas proposições F e G:

- G é **condição necessária** para F quando G é uma circunstância em cuja ausência F não pode ocorrer;
- F é **condição suficiente** para G se F é uma circunstância em cuja presença G deve ocorrer.
- Se F então G:
  - Ser G é uma condição necessária para ser F;
  - Ser F é uma condição suficiente para ser G.
- Se todo F for G e todo G for F
  - ser G é uma condição necessária e suficiente para ser F.

Exemplos

- "Todo mineiro é brasileiro."
- "Estar na capital do Brasil é condição necessária e suficiente para estar em Brasília."
- "Se Carlos deixar o governo, o pedido de CPI será arquivado."

Exercício

Determine a *oposta*, *contrapositiva* e *inversa* da seguinte condicional:
"O time da casa ganha sempre que está chovendo"

- **original**: "Se está chovendo, então o time da casa ganha"
- **oposta**: "Se o time da casa ganha, então está chovendo"
- **contrapositiva**: "Se o time da casa não ganha, então não está chovendo"
- **inversa**: "Se não está chovendo, o time da casa não ganha"

Três estudantes declararam o seguinte:

- Paulo: "Eu não fiz o teste, mas, se Rogério o fez, Sérgio também fez."
- Rogério: "Eu fiz o teste, mas um de meus colegas não fez."
- Sérgio: "Se Rogério fez o teste, eu também o fiz."

Formalize estas três declarações na linguagem lógica proposicional utilizando o vocabulário abaixo:

- P: Paulo fez o teste.
- R: Rogério fez o teste.
- S: Sérgio fez o teste.

Monte a tabela-verdade das proposições e utilize-a para responder as seguintes questões:

- Se todos estão dizendo a verdade, quem fez o teste?
- Se todos estão mentindo, quem fez o teste?
- Se todos fizeram o teste, quem está dizendo a verdade e quem está mentindo?

Exercício

Escreva cada uma das proposições a seguir na forma de $P \rightarrow Q$

- É necessário lavar o carro do chefe para ser promovido
- Ventos do sul implicam em degelo primaveril
- Uma condição suficiente para a garantia ser válida é que você tenha comprado o computador em menos de um ano
- Leo é pego sempre que trapaceia

Exercício

Determine a oposta, a contrapositiva e a inversa de cada uma das proposições condicionais:

- Se nevar esta noite, então ficarei em casa
- Eu vou a praia sempre que faz um dia ensolarado de verão
- Quando me deito tarde, é necessário que eu durma até o meio-dia

Exercício

Sejam as proposições P: "Está chovendo", Q: "O sol está brilhando" e R: "Há nuvens no céu". Traduza as seguintes sentenças abaixo em notação lógica:

- "choverá se o sol brilhar ou se o céu estiver com nuvens."
- "se está chovendo, então há nuvens no céu."
- "o sol brilha quando e apenas quando o céu fica com nuvens."

Traduza as seguintes proposições para o português:

- $(P \wedge Q) \rightarrow R$
- $\neg P \leftrightarrow (Q \vee R)$
- $\neg(P \vee Q) \wedge R$

Exercício

Construa a tabela verdade para cada uma das fórmulas dos exercícios anteriores.

Referências

1. GERÔNIMO, J. R. *Exercícios de Lógica*, Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, 2007
2. MARTINS, L. G. A. *Apostila de lógica proposicional*, FACOM, UFU.
3. PAIVA, J. G. S. Lógica para Computação. Introdução – notas de aula.
4. ROSEN, K. H. *Matemática Discreta e suas Aplicações*, Editora McGraw Hill, 6 Ed., 2008
5. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU
LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU