Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação

Sintaxe na lógica de predicados

Prof. Renato Pimentel

2023/2

Sumário

Introdução

- **Lógica proposicional**: fórmulas são **veritativo-funcionais**:
  - Interpretações não dependem da estrutura interna de suas proposições, mas do modo como se combinam.
  - **Ex.:** $P \vee Q$
    Interpretação depende da interpretação isolada de P e Q, e do conectivo.

Introdução

- Lógica proposicional *não consegue* representar todas as situações:
  - **Todo** aluno é inteligente.
  - A adição de dois números ímpares **quaisquer** é um número par.
  - Dado um número **qualquer**, **existe** um número primo maior que ele.
- **Limitação**: Expressões que envolvem *todo(s)*, *qual(is)quer*, *nenhum(ns)*, *algum(ns)*, etc.
- A representação é baseada em casos particulares, específicos.

Introdução

- Exemplo de argumento:
  - Sócrates é homem
  - Todo homem é mortal
  - Logo, Sócrates é mortal
- Intuitivamente, sabemos que esse argumento é válido.
- Usando a lógica proposicional, teríamos a seguinte formalização:

$$\{P, Q\} \vdash R$$

- Não é possível demonstrar sua validade.
- **Problema**: palavra **"todo"**, que não pode ser expressa na lógica proposicional.

Lógica de predicados

- **Lógica de Predicados**: mais completa
- **Extensão** da lógica proposicional.
- Novos recursos:
  1. Quantificadores.
  2. Símbolos funcionais (funções);
  3. Predicados.

Alfabeto da lógica de predicados

1. *Símbolos de pontuação*: (,);
2. *Símbolos de verdade*: true, false;
3. Conjunto enumerável de *símbolos para* **variáveis**:
   $x, y, z, w, x_1, y_1, z_1$, etc.
4. Conjunto enumerável de *símbolos para* **funções**:
   f, g, h, f_1, g_1, h_1, etc.
5. Conjunto enumerável de *símbolos para* **predicados**:
   p, q, r, p_1, q_1, r_1, etc.
6. *Conectivos*:
   $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.

Funções

Mapeamento de valores de entrada em valores de saída

Predicados

Relações, propriedades dos elementos do domínio

Aridade

- Funções e predicados possuem **argumentos**.
- **Aridade**: número de argumentos.
- Quando a aridade de uma função é 0, temos uma **constante**:
  a, b, c, a_1, b_1, c_1, etc.
- Quando a aridade de um predicado é 0, temos um **símbolo proposicional**:
  P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, etc.

Conectivos

- $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$: mesmo alfabeto da lógica proposicional
- **Quantificadores**:
  - $\forall$: para todo (**quantificador universal**)
  - $\exists$: existe (**quantificador existencial**)

Quantificador universal

Generalizações – $(\forall x)p(x)$:

- Todo homem é mortal.
- Todos os homens são mortais.
- Os homens são mortais.
- Homens são sempre mortais.
- Somente homens é que são mortais.
- Se é homem, então é mortal.

Quantificador existencial

Existência de pelo menos uma ocorrência – $(\exists x)p(x)$:

- Existe homem inteligente.
- Há homens inteligentes.
- Há pelo menos um homem inteligente.
- Algum homem é inteligente.

Elementos básicos da linguagem

- Linguagem natural possibilita sentenças cuja interpretação pode ser:
  - Um valor verdade:
    A capital de Minas Gerais é Belo Horizonte?
  - Um **objeto**:
    Qual a capital de Minas Gerais?

- **Lógica de predicados**:
  - **Termos**: sentenças que representam objetos
  - **Fórmulas**: sentenças que representam um valor de verdade

Termo

- **Variáveis** são termos;
- Se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos e f é um símbolo para *função n-ária*, então $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é um termo.
- Exemplos:
  - Variável x;
  - Constante a (função *zero-ária*);
  - $f(x, a)$, com f sendo uma *função binária*;
  - $g(y, f(x, a), c)$, com g sendo uma *função ternária* e f binária.
    - ★ **Obs.:** Se f é binária, então a concatenação $f(y, x, z)$ *não* é um termo – f deve conter dois argumentos.
  - Se $h(x, y, z)$ é um termo, então, considera-se, implicitamente, que h é ternária.

Termo

- Exemplo (aritmética):
  - $+, -$: funções;
  - $1, 2, \ldots, 9, 0$: constantes;
  - $x, 9, y, 8$: termos (variáveis e constantes);
  - $+(5, 8)$: termo;
  - $+(-(8, 7), 3)$: termo.

Termo

- Exemplo: função **idade(pessoa)**:
  - idade(joao) $= 25$
  - idade(ana) $= 18$
- Exemplo: função **populacao(cidade)**:
  - populacao(Uberlandia)$=$ 600.000
  - populacao(Chicago)$=$ 2.700.000
- Exemplo: função **prefeito(cidade,ano)**:
  - prefeito(Uberlandia,2014)$=$ *Gilmar*
  - prefeito(Uberlandia,2018)$=$ *Odelmo*

Átomo

- Os símbolos verdade true e false são **átomos**.
- Se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos e p é um símbolo para predicado *n-ário*, então $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é um átomo.
- Exemplos:
  - Símbolo verdade false;
  - Símbolo proposicional P (predicado *zero-ário*);
  - $p(f(x, a), x)$, com p um predicado binário, e x, a, $f(x, a)$ termos;
  - $q(x, y, z)$, com q um predicado ternário;
  - true, considerando true $= \neg$ false.

Átomo

- Exemplo (aritmética):
  - $\neq$, $\leq$: predicados
  - $\leq (+(5, 8), 3)$: átomo, com valor false.
  - $\neq (-(8, 7), 3)$: átomo, com valor true.

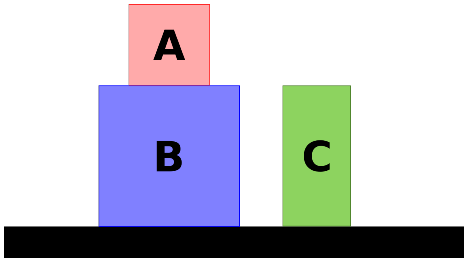
Átomo

- Exemplo – predicado **professor(pessoa)**:
  - professor(Renato)= true
  - professor(Maria)= false
- Exemplo – predicado **maisvelho(pessoa1, pessoa2)**:
  - maisvelho(Ana,Carlos)= true
  - professor(Joao,Maria)= false
- Exemplo – predicado **pertence(objeto, pessoa)**:
  - pertence(carro,Joana)= false
  - pertence(livro,Pedro)= true

Observação

- Resultados das interpretações dos átomos: **valores verdade**;
- Resultados das interpretações dos termos: **objetos**.

Exemplo



Exemplos de predicados:

- predicado **sobre**: sobre(A,B)= true
- predicado **cor**: cor(B,azul)= true ou predicado **azul**: azul(B)= true
- predicado **maior**: maior(B,C)= true

Fórmulas

Construção pela concatenação de átomos e conectivos: **regras**

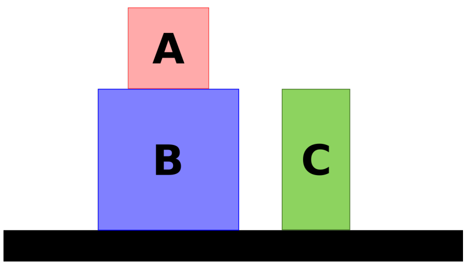
- Regras de definição:
  1. Todo átomo é uma fórmula;
  2. Se H é uma fórmula, $\neg H$ é uma fórmula;
  3. Se H e G são fórmulas, $H \vee G$, $H \wedge G$, $H \rightarrow G$, $H \leftrightarrow G$ são fórmulas;
  4. Se H é uma fórmula e x uma variável, então
     $(\forall x)H$ e $(\exists x)H$
     são fórmulas.

Fórmulas

- Exemplos:
  - Os átomos $p(x)$, R e false são fórmulas;
  - $(\neg p(x) \vee R)$ é uma fórmula, assim como $p(x) \rightarrow R$;
  - Como $p(x) \rightarrow R$, então $(\forall x)(p(x) \rightarrow R)$ também é uma fórmula.
- **Expressão**: termo ou fórmula.

Toda concatenação de símbolos *válida* na lógica de predicados é uma **expressão**.

Exemplo



Exemplo de fórmula:

- $H = \text{sobre}(A, B) \wedge \text{sobre}(B, mesa)$

Definem partes de um termo ou fórmula E:

- Se $E = x$, então x é **subtermo** de E;
- Se $E = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, então t_i e $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ são subtermos de E;
- Se t_1 é subtermo de t_2 e t_2 é subtermo de E, então t_1 é subtermo de E;
- Se H é uma fórmula e $E = \neg H$, então H e $\neg H$ são **subfórmulas** de E;

- Se H e G são fórmulas e E é uma das fórmulas $(H \vee G)$, $(H \wedge G)$, $(H \rightarrow G)$, $(H \leftrightarrow G)$, então H, G, e E são subfórmulas de E.
- Se H é uma fórmula, x uma variável, Δ um dos quantificadores $\forall$ ou $\exists$ e $E = (\Delta x)H$, então H e $(\Delta x)H$ são subfórmulas de E;
- Se H_1 é subfórmula de H_2 e H_2 é subfórmula de E, então H_1 é subfórmula de E;
- Todo subtermo ou subfórmula é uma subexpressão.

Exemplo:

- $H = ((\forall x)p(x)) \rightarrow (p(x)) \wedge ((\forall y)r(y));$
- $G = p(x);$
- A subfórmula G ocorre duas vezes em H;
- Como G não é igual a H, então G é uma **subfórmula própria** de H;

Ordem de precedência

1. $\neg$
2. $\forall$, $\exists$
3. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
4. $\vee$, $\wedge$

- Como na Lógica Proposicional, a ordem de precedência é útil na simplificação de fórmulas
- Exemplo:
  $((((\forall x)((\exists y)p(x,y))) \rightarrow (\exists z)(\neg q(z))) \wedge r(y))$
  - Simplificando: $(\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\exists z)\neg q(z) \wedge r(y)$

- $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ podem ser escritos utilizando $\neg$, $\vee$ (alfabeto simplificado);
- Analogamente, é possível representar $\exists$ utilizando $\forall$, e vice-versa;
- Assim, é possível escrever o alfabeto da lógica de predicados usando apenas $\neg$, $\vee$, $\forall$.

Exemplo: "Existe carro que é bonito"

Considerando-se o conjunto dos carros:

- Representação: $(\exists x)p(x)$;
- $p(x) = T$ se, e somente se, x é bonito.

Se $(\exists x)p(x) = T$, então $(\forall x)\neg p(x) = F$

- $(\forall x)\neg p(x)$ representa a afirmação "Todo carro é feio".
- No entanto, se $(\forall x)\neg p(x) = F$, então $\neg((\forall x)\neg p(x)) = T$.
- $\neg((\forall x)\neg p(x))$ representa a afirmação "É falso que todo carro é feio" (pelo menos um é bonito).

Correspondência entre $\exists$ e $\forall$

- Seja H uma fórmula, e x uma variável;
- Os quantificadores $\exists$ e $\forall$ se relacionam de acordo com as seguintes correspondências:
  - $(\exists x)H = \neg((\forall x)\neg H)$
  - $(\forall x)H = \neg((\exists x)\neg H)$

Exemplo: considerando-se os seguintes predicados:

- $p(x) = T$ se, e somente se, x é de Uberlândia.
- $q(x) = T$ se, e somente se, x é professor.

As proposições abaixo podem ser construídas:

- $(\forall x)p(x)$: Todas as pessoas são de Uberlândia.
- $\neg(\forall x)p(x)$: Nem todas as pessoas são de Uberlândia.
- $(\exists x)q(x)$: Alguém é professor.
- $\neg(\exists x)q(x)$: Ninguém é professor.

Múltiplos quantificadores

- Quantificadores de mesmo tipo podem ser comutados: $(\forall x)(\forall y)p(x,y) = (\forall y)(\forall x)p(x,y)$
- Porém, quantificadores de tipos distintos **não** podem ser comutados: $(\forall x)(\exists y)p(x,y) \neq (\exists y)(\forall x)p(x,y)$

- Notação: comp$[H]$
- Se H é um átomo, então comp$[H] = 1$;
- Se $H = \neg G$, então comp$[\neg G] =$ comp$[G] + 1$;
- Se H e G são fórmulas da lógica de predicados, então:
  - comp$[H \vee G] =$ comp$[H] +$ comp$[G] + 1$
  - comp$[H \wedge G] =$ comp$[H] +$ comp$[G] + 1$
  - comp$[H \rightarrow G] =$ comp$[H] +$ comp$[G] + 1$
  - comp$[H \leftrightarrow G] =$ comp$[H] +$ comp$[G] + 1$
- Se $H = (\Delta x)G$, Δ sendo um dos quantificadores $\forall$ ou $\exists$, então comp$[(\Delta x)G] =$ comp$[G] + 1$.

Exemplos:

- $H = (p(x) \rightarrow q(x))$
  comp$[H] =$ comp$[p(x)] +$ comp$[q(x)] + 1 = 3$
- $G = (\forall x)p(x) \leftrightarrow (\exists y)q(y)$
  comp$[G] =$ comp$[(\forall x)p(x)] + 1 +$ comp$[(\exists y)q(y)] =$
  comp$[p(x)] + 1 + 1 +$ comp$[q(x)] + 1 = 5$

Observação

Se G é subfórmula de H, comp$[G] \leq$ comp$[H]$

- **Escopo (abrangência)**: Seja E uma fórmula da lógica de predicados:
  - Se $(\forall x)H$ é subfórmula de E, então o escopo de $(\forall x)$ em E é a subfórmula H;
  - Se $(\exists x)H$ é subfórmula de E, então o escopo de $(\exists x)$ em E é a subfórmula H.
- O escopo de um quantificador em uma fórmula E é a subfórmula de E referida pelo quantificador (**"domínio"** do quantificador).

Exemplo: $E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z_1))$

- Escopo de $(\forall x)$ em E:
  $(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z_1))$
- Escopo de $(\exists y)$ em E:
  $(\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z_1)$
- Escopo de $(\forall z)$ em E:
  $p(x, y, w, z)$
- Escopo de $(\forall y)$ em E:
  $q(z, y, x, z_1)$

Sejam x uma variável e E uma fórmula:

- Uma ocorrência de x em E é **ligada** se x está no escopo de um quantificador $(\forall x)$ ou $(\exists x)$ em E.
- Uma ocorrência de x em E é **livre** se não for ligada.

- **Exemplo**: $E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \to (\forall y)q(z, y, x, z_1))$
- Identificando com sub-índices, temos:
  $E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x_g, y_g, w_v, z_g) \to (\forall y)q(z_v, y_g, x_g, z_{1v}))$
  - v: variáveis livres
  - g: variáveis ligadas
- Uma variável pode ocorrer livre e ligada em uma mesma fórmula (por exemplo, a variável z)
- A ocorrência da variável y está no escopo de dois quantificadores $(\exists y)$ e $(\forall y)$
  - Neste caso a ocorrência de y está ligada pelo quantificador mais próximo, $(\forall y)$.

Sejam x uma variável e E uma fórmula que contém x.

- A variável x é ligada em E se existe pelo menos uma ocorrência ligada de x em E
- A variável x é livre em E se existe pelo menos uma ocorrência livre de x em E
- **Exemplo**:
  $E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x_g, y_g, w_v, z_g) \to (\forall y)q(z_v, y_g, x_g, z_{1v}))$
  - x, y e z são ligadas em E;
  - w, z e z_1 são livres em E.

- Dada uma fórmula E, os seus símbolos livres são:
  - Variáveis que ocorrem livres em E;
  - Símbolos de função;
  - Símbolos de predicado.
- Exemplo: $E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \to (\forall y)q(z, y, x, z_1))$
  O conjunto $\{w, z, z_1, p, q\}$
- Uma fórmula é fechada se não possui variáveis livres.
  - Exemplo:
    $E_1 = (\forall w)(\exists z)(\forall z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \to ((\exists y)q(z, y, x, z_1))$

Seja H uma fórmula da lógica de predicados e $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o conjunto de variáveis livres em H.

- O **fecho universal** de H, $(\forall *)H$ é dado por $(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)H$
- O **fecho existencial** de H, $(\exists *)H$ é dado por $(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)H$

Exemplo: $E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \to (\forall y)q(z, y, x, z_1))$

- $E_1 = (\forall w)(\forall z)(\forall z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \to ((\forall y)q(z, y, x, z1))$ é o **fecho universal** de E.
- $E_2 = (\exists w)(\exists z)(\exists z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \to ((\forall y)q(z, y, x, z_1))$ é o **fecho existencial** de E.

Exercícios

- Existe fórmula ou expressão sem símbolos livres?
- Quais os símbolos livres de uma fórmula fechada?
- Toda variável é símbolo livre?
- Dê um exemplo de:
  - Uma fórmula cujo fecho existencial contém apenas quantificadores universais.
  - Uma fórmula cujo fecho universal ou existencial não contém quantificadores.
  - Uma fórmula cujo fecho universal ou existencial é igual a ela própria.

Exercícios

- Dada a fórmula a seguir:
  $E = (\forall w)(\forall z)(\forall z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z_1))$,
  determine seus subtermos e subfórmulas.
- Determine o fecho universal e existencial das fórmulas a seguir:
  - $F_1 = p(x, y)$
  - $F_2 = (\exists x)p(x, y)$
  - $F_3 = (\exists y)(\exists x)p(x, y)$

Referências

1. PAIVA, J. G. S. *Lógica para Computação. Introdução* – notas de aula.
2. PEREIRA, S. L., *Lógica de Predicados*, disponível em `http://www.ime.usp.br/~slago/IA-logicaDePredicados.pdf`
3. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU
LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU