Sintaxe na lógica proposicional

Prof. Renato Pimentel

2023/2

Lógica proposicional

Forma mais simples da lógica:

- Fatos do mundo real representados por sentenças sem argumento $\rightarrow$ **proposições**;
- **Proposição** – Sentença de qualquer natureza que pode ser qualificada como **verdadeira** ou **falsa**.

Exemplos

- $1 + 1 = 2$
- $0 > 1$

Frases

Se não é possível definir a interpretação (verdadeiro ou falso) da sentença, ela não é uma proposição.

Exemplos:

- Frases Interrogativas
  - Qual o seu nome?
- Frases Imperativas:
  - Preste atenção!
- Paradoxos Lógicos ou ambiguidades:
  - Esta frase é falsa.
  - Toda regra tem uma exceção.
  - Eu vi Carlos com um relógio.

Tempo e significado

Lógica proposicional: ênfase no **significado** das sentenças.

- **Tempo:** irrelevante

Ex. São equivalentes:

- João **tomou** café
- O café foi tomado por João
- João **toma** café
- João **tomará** café

Exercício 1

Verifique, justificando, se as expressões abaixo são proposições:

- Brasília é a capital do Brasil
- Uberlândia fica em Goiás
- $1 + 1 = 2$
- $2 + 2 = 3$
- $x + 1 = 2$
- $x + y = z$
- Leia isto cuidadosamente

Exercício 2

Verifique, justificando, se as expressões abaixo são proposições:

- Boa sorte!
- Todas as mulheres possuem sua beleza
- Márcio não é irmão do Mário
- Não faça isso!
- Cecília é escritora.
- Quantos japoneses moram no Brasil?

Sumário

Linguagem

Representação do conhecimento.

- Duas partes:
  - **Sintaxe** – símbolos e notações
  - **Semântica** – significado, entendimento
- Definição semelhante à realizada em outras linguagens:
  - **Alfabeto**
  - **Palavras**

Alfabeto

Conjuntos de símbolos visuais, que produzem o que a linguagem quer dizer.

Alfabeto da lógica proposicional:

- Símbolos de pontuação: (,);
- Símbolos de verdade: **true**, **false**;
  - Algumas referências: $\top$ (*verum*) e $\bot$ (*falsum*)
- Símbolos proposicionais: P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, $\ldots$;
- **Conectivos** proposicionais: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Conectivos

- $\neg$: "não" ou **negação**
- $\wedge$: "e" ou **conjunção**
- $\vee$: "ou" ou **disjunção**
- $\rightarrow$: "se então" ou "implica"
- $\leftrightarrow$: "se, e somente se", "sse" ou ainda, **bi-implicação**.

Fórmulas

- Representam as palavras/frases da lógica proposicional
  - Concatenação de símbolos do alfabeto
- Gramática
  - Nem todas as combinações são válidas
- Princípio: obtenção de fórmulas complexas a partir de fórmulas simples
  - É possível obter um conjunto infinito de fórmulas

Regras

1. Todo símbolo de verdade é uma fórmula;
2. Todo símbolo proposicional é uma fórmula;
3. Se H é uma fórmula, então $(\neg H)$ é uma fórmula;
4. Se H e G são fórmulas, então $(H \vee G)$ é uma fórmula (**disjunção de H e G**);
5. Se H e G são fórmulas, então $(H \wedge G)$ é uma fórmula (**conjunção de H e G**);
6. Se H e G são fórmulas, então $(H \rightarrow G)$ – **implicação de H em G** – é uma fórmula (H é o antecedente, e G consequente);
7. Se H e G são fórmulas, então $(H \leftrightarrow G)$ – **bi-implicação de H em G** – é uma fórmula (H é o lado esquerdo, e G o lado direito).

Fórmulas mal formadas

As concatenações dos símbolos que seguem não constituem fórmulas:

- PR
- $(R\,\text{true} \leftrightarrow)$
- $(\text{true} \rightarrow\leftrightarrow (R\,\text{true} \rightarrow))$

Note que não é possível obtê-las a partir das regras apresentadas.

Simplificação da notação

- Parênteses ou símbolos são omitidos nas fórmulas quando não há problemas sobre sua interpretação.
- Também é possível usar **múltiplas linhas** para melhor leitura.

Por exemplo:

$$(((P \vee R) \rightarrow \text{true}) \leftrightarrow (Q \wedge S))$$

pode ser reescrita como

$$(P \vee R) \rightarrow \text{true}$$
$$\leftrightarrow$$
$$Q \wedge S$$

ou ainda

$$((P \vee R) \rightarrow \text{true}) \leftrightarrow (Q \wedge S)$$

Exercícios

1. Dados os símbolos proposicionais P e Q, mostre que $((P \wedge Q) \vee ((\neg P) \rightarrow (\neg Q)))$ é uma fórmula proposicional.
2. Verifique se as fórmulas a seguir são válidas:
   1. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \rightarrow P)$;
   2. $(P \vee \neg PQ) \rightarrow (Q \wedge \neg Q)$;
   3. $\neg((P \wedge \neg\neg Q) \rightarrow \neg R)$;
   4. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg \rightarrow \neg P)$;
   5. $((Q \wedge R) \vee \neg(\neg Q \vee P) \vee (P \wedge \neg R)) \rightarrow (R \vee \neg P)$.

Ordem de precedência

Ordem de aplicação dos símbolos conectivos. Similar ao que ocorre na matemática.

- Exemplo:

$$2 + 4 \times 5 \rightarrow (2 + (4 \times 5))$$

- Em alguns casos, não há ordem de precedência:

$$4 \times 6/3 \rightarrow ((4 \times 6)/3) \text{ ou } (4 \times (6/3))$$

Precedência na lógica proposicional

1. $\neg$
2. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
3. $\vee$, $\wedge$

Em alguns casos, não há precedência nos símbolos, e múltiplas interpretações são possíveis.
Pode-se usar múltiplas linhas para facilitar a compreensão nesse caso.

Exercícios

- Elimine o maior número possível de parênteses da fórmula, sem alterar seu significado original

$$((\neg X) \vee ((\neg(X \vee Y)) \vee Z))$$

- Identifique quais fórmulas pertencem à lógica proposicional. Justifique sua resposta, apresentando as regras de construção utilizadas ou apontando uma concatenação inválida.
  (Para as fórmulas válidas, remova os símbolos de pontuação sem afetar sua interpretação)
  - $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow P) \vee (\neg(\neg R)))$
  - $\vee Q \rightarrow R$
  - $(P \vee R) \rightarrow (Q \leftrightarrow ((\neg T) \wedge R))$
  - $(PQ \vee True)$
  - $((\neg(\neg P)) \leftrightarrow ((\neg((\neg(\neg(P \vee Q))) \rightarrow R)) \wedge P))$
  - $(\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg\neg R \vee \neg P))$

Comprimento de uma fórmula

- Notação: comp $[H]$
- **Definição**:
  - Se H é um símbolo proposicional ou de verdade, então comp $[H] = 1$
  - Se H e G são fórmulas da Lógica Proposicional, então:
    - ★ $\text{comp}[\neg H] = \text{comp}[H] + 1$
    - ★ $\text{comp}[H \vee G] = \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1$
    - ★ $\text{comp}[H \wedge G] = \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1$
    - ★ $\text{comp}[H \rightarrow G] = \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1$
    - ★ $\text{comp}[H \leftrightarrow G] = \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1$
- Os símbolos de pontuação não são considerados.

Linguagem objeto e meta-linguagem

- **Linguagem-objeto**: expressa a informação em sua forma original.
  Ex.: *Bia is a student*
- **Metalinguagem**: expressa uma informação contida na linguagem-objeto, a ideia do que está escrito
  Ex.: "Bia is a student" é uma sentença da língua inglesa.
- O mesmo ocorre na Lógica Proposicional:
  $((P \vee Q \rightarrow \text{true})$ é uma fórmula da lógica proposicional.

Variáveis

- Facilitam expressão de leis (generalização):

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$$

- Símbolos proposicionais podem ser representados por variáveis do tipo $\breve{P}$, com possíveis sub-índices
  Ex.: $\breve{P}_1$ pode representar qualquer um dos símbolos:
  $P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, \ldots$

As variáveis A, B, C, D, E, H e G com possíveis subíndices representam fórmulas.

- A variável H_2 pode representar, por exemplo, a fórmula $(P \rightarrow Q)$

Letras como $\check{P}$, A, B, C, D, E, H e G são elementos da metalinguagem que representam símbolos proposicionais e fórmulas em geral da lógica proposicional.

Assim, $(\check{P}_1 \rightarrow \check{P}_2)$ não é uma fórmula da lógica proposicional:

- Essa expressão é a representação de fórmulas do tipo $(P \rightarrow Q)$, $(R \rightarrow S)$, etc.

- $(H \lor G)$ também não representa uma fórmula, mas a representação de fórmulas tais como
  $((P \rightarrow Q) \lor (R \land S))$
  - H é substituída por $(P \rightarrow Q)$;
  - G é substituída por $(R \land S)$.
- Expressões do tipo $(\check{P}_1 \rightarrow \check{P}_2)$ e $(H \lor G)$ são denominadas **esquemas de fórmulas**.
- Os esquemas de fórmulas se transformam em fórmulas quando as metavariáveis são substituídas por símbolos e fórmulas da lógica.

Subfórmulas

Definição:

- H é subfórmula de H;
- Se $H = (\neg G)$, então G é subfórmula de H;
- Se H é uma fórmula do tipo $(G \lor E)$, $(G \land E)$, $(G \rightarrow E)$ ou $(G \leftrightarrow E)$, então G e E são subfórmulas de H;
- Se G é subfórmula de H, então toda subfórmula de G é subfórmula de H.

Exercício

Determine as subfórmulas das seguintes fórmulas proposicionais:

- $((\neg\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \to Q)) \wedge \text{true}$
- $P \to ((Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R)))$
- $((P \to \neg P) \leftrightarrow \neg P) \vee Q$
- $\neg(P \to \neg Q)$

Referências

1. PAIVA, J. G. S. Lógica para Computação. Introdução – notas de aula.
2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.
3. SOUZA, J. N. *Lógica Matemática*. Video-aulas em `https://www.youtube.com/playlist?list=PLf0uuzm1GgEDEnqzQLJEKrqwDgjEB0uQ1`
4. MARTINS, L. G. A, Apostila de Lógica Proposicional, FACOM, UFU.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU