Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação

Tableaux semânticos

Prof. Renato Pimentel

2023/2

Sumário

Sistemas de dedução

- Estabelecem estruturas que permitem a representação e dedução do conhecimento
- Três sistemas:
  1. Sistema axiomático
  2. *Tableaux* semânticos
  3. Resolução

Motivação

- **Sistema axiomático**: inadequado à implementação em computadores;
- Não se conhece uma implementação que realize a mecanização do sistema axiomático P_a de forma adequada;
- Duas alternativas apropriadas para implementação: *tableaux* e resolução.

Limitações do sistema axiomático

1. Método permite apenas demonstrar se $\beta \vdash H$: não se pode demonstrar se $\beta \nvdash H$.
2. No P_a, se é dado que $\beta \nvdash H$, não se pode concluir $\beta \vdash \neg H$.

Tableaux semânticos

A partir de fórmula H:

- $\beta \vdash H$?
- $\beta \nvdash H$?

A partir dos ***tableaux* semânticos**, é possível verificar qual das duas situações de fato ocorre.

Sistema de *tableaux* semânticos Tb_a

Tableau semântico

Sequência de fórmulas obtida de acordo com conjunto de regras e apresentada sob forma de árvore.

- Elementos básicos:
  1. Alfabeto da lógica proposicional – **sem** símbolos false e true;
  2. Conjunto de fórmulas da lógica proposicional
  3. Conjunto de **regras de dedução**

Regras de inferência $R_1, \ldots, R_9$

Dadas duas fórmulas quaisquer A e B da lógica proposicional:

$$R_1 = A \wedge B \qquad \begin{array}{c} A \\ B \end{array}$$

$$R_2 = A \vee B \qquad \begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ A & B \end{array}$$

$$R_3 = A \rightarrow B \qquad \begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \neg A & B \end{array}$$

$$R_4 = A \leftrightarrow B \qquad \begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ A \wedge B & \neg A \wedge \neg B \end{array}$$

$$R_5 = \neg\neg A \qquad A$$

$$R_6 = \neg(A \wedge B) \qquad \begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \neg A & \neg B \end{array}$$

$$R_7 = \neg(A \vee B) \qquad R_8 = \neg(A \to B) \qquad R_9 = \neg(A \leftrightarrow B)$$

$$\begin{array}{ccc} \neg A & A & \swarrow \quad \searrow \\ \neg B & \neg B & \neg A \wedge B \qquad A \wedge \neg B \end{array}$$

Exemplo

$$\{(A \vee B), (A \wedge \neg B)\}$$

$$\begin{array}{lcl}
1. & A \vee B & \\
2. & A \wedge \neg B & \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
3. & A \qquad B & R_2\ 1. \\
4. & A \qquad A & R_1\ 2. \\
5. & \neg B \qquad \neg B & R_1\ 2.
\end{array}$$

Outra forma (**adiando ramificação**):

$$\{(A \vee B), (A \wedge \neg B)\}$$

1.	$A \vee B$	
2.	$A \wedge \neg B$	
3.	A	R_1 2.
4.	$\neg B$	
	$\swarrow \quad \searrow$	R_1 2.
5.	$A \qquad B$	R_2 1.

Heurística de aplicação de regras

- Aplique preferencialmente regras: R_1, R_5, R_7 e R_8.
- Tais regras não bifurcam o *tableau*.

Construção do *tableau* semântico I

Dado um conjunto de fórmulas

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

- A **árvore** tab_1 a seguir corresponde ao *tableau* iniciado com $A_1, \ldots, A_n$:

$$\begin{array}{ll} 1. & A_1 \\ 2. & A_2 \\ \vdots & \vdots \\ n. & A_n \end{array}$$

Nota: As fórmulas $A_1, \ldots, A_n$ podem ser escritas em qualquer ordem.

Construção do *tableau* semântico II

- tab_2: árvore resultante da aplicação de uma das regras $R_1, \ldots, R_9$ a tab_1.
  - tab_2 também é *tableau* iniciado com $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

$\vdots$

- tab_i, $i \geq 2$: *tableau* iniciado com $\{A_1, \ldots, A_n\}$
- tab_{i+1}: árvore resultante da aplicação de uma das regras $R_1, \ldots, R_9$ a tab_i.
  - tab_{i+1} também é *tableau* iniciado com $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

$$\{(A \to B), \neg(A \vee B), \neg(C \to A)\}$$

tab_1:

1.	$A \to B$	
2.	$\neg(A \vee B)$	
3.	$\neg(C \to A)$	

tab_2 – aplicação de R_7 a tab_1:

1.	$A \to B$	
2.	$\neg(A \vee B)$	
3.	$\neg(C \to A)$	
4.	$\neg A$	$R_7, 2.$
5.	$\neg B$	$R_7, 2.$

tab_3 – aplicação de R_3 a tab_2:

$$
\begin{array}{lccl}
1. & & A \to B & \\
2. & & \neg(A \vee B) & \\
3. & & \neg(C \to A) & \\
4. & & \neg A & R_7, 2. \\
5. & & \neg B & R_7, 2. \\
 & & \swarrow \quad \searrow & \\
6. & \neg A & B & R_3, 1.
\end{array}
$$

tab_4 – aplicação de R_8 a tab_3:

$$
\begin{array}{lccl}
1. & & A \to B & \\
2. & & \neg(A \vee B) & \\
3. & & \neg(C \to A) & \\
4. & & \neg A & R_7, 2. \\
5. & & \neg B & R_7, 2. \\
 & & \swarrow \quad \searrow & \\
6. & \neg A & B & R_3, 1. \\
7. & C & C & R_8, 3. \\
8. & \neg A & \neg A & R_8, 3.
\end{array}
$$

Ramo à direita: contém $\neg B$ e B.

Ramo

Sequência $H_1, \ldots, H_n$, onde H_1: primeira fórmula do *tableau*, e H_{i+1} é derivada de H_i, $1 \leq i < n$, através de alguma regra de Tb_a.

- **Ramo fechado**: se contém A e $\neg A$, onde A é uma fórmula da lógica proposicional.
- **Ramo saturado**: para toda fórmula A do ramo:
  - Já se aplicou regra de Tb_a em A (A for expandida por alguma regra); ou
  - Não é possível aplicar regra alguma em A (A é um **literal**).
- **Ramo aberto**: Ramo saturado, mas não fechado.

- ***Tableau* fechado**: quando todos os seus ramos são fechados;
- ***Tableau* aberto**: quando contém ao menos um ramo aberto.

Exemplo: $\{(A \wedge B) \to C, (A \wedge B) \wedge \neg C\}$

$$
\begin{array}{lccr}
1. & \multicolumn{2}{c}{(A \wedge B) \to C} & \\
2. & \multicolumn{2}{c}{(A \wedge B) \wedge \neg C} & \\
3. & \multicolumn{2}{c}{(A \wedge B)} & R_1, 2. \\
4. & \multicolumn{2}{c}{\neg C} & R_1, 2. \\
 & \swarrow & \searrow & \\
5. & \neg(A \wedge B) & C & R_3, 1. \\
 & \text{fechado} & \text{fechado} &
\end{array}
$$

O *tableau* é fechado – seus 2 ramos são fechados.

Consequência lógica no Tb_a

Seja H uma fórmula:

- Uma **prova** de H no Tb_a é um ***tableau* fechado** iniciado com $\neg H$.
  - Neste caso, H é um **teorema** do sistema Tb_a.

Exemplo: $H = \neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P)$

O *tableau* é iniciado com $\neg H$:

1.	$\neg\neg(((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P)$	$\neg H$
2.	$((P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P$	$R_5, 1.$
3.	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)$	$R_1, 2.$
4.	$\neg\neg P$	$R_1, 2.$
5.	$(P \rightarrow Q)$	$R_1, 3.$
6.	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	$R_1, 3.$
7.	P	$R_5, 4.$
	$\swarrow \quad \searrow$	
8.	$\neg P \qquad Q$	$R_1, 5.$
	fechado $\quad \swarrow \quad \searrow$	
9.	$(\neg P \wedge Q) \quad (P \wedge \neg Q)$	$R_9, 6.$
10.	$\neg P \qquad P$	$R_1, 9.$
11.	$Q \qquad \neg Q$	$R_1, 9.$
	fechado **fechado**	

O presente *tableau* – **fechado** – é uma prova de H.
Notação: $\vdash H$

- $\vdash H$ denota uma prova em Tb_a.

Exemplo 2: $G = ((P \leftrightarrow Q) \lor \neg P)$

$$
\begin{array}{llll}
1. & & \neg((P \leftrightarrow Q) \lor \neg P) & \neg G \\
2. & & \neg(P \leftrightarrow Q) & R_7, 1. \\
3. & & \neg\neg P & R_7, 1. \\
4. & & P & R_5, 3. \\
 & \swarrow & \searrow & \\
5. & P \land \neg Q & \neg P \land Q & R_9, 2. \\
6. & P & \neg P & R_1, 5. \\
7. & \neg Q & Q & R_1, 5. \\
 & \textbf{aberto} & \textbf{fechado} &
\end{array}
$$

G não é tautologia, e o *tableau* não constitui prova de G.

Completude e correção

Seja H uma fórmula da lógica proposicional:

Teorema da completude

Se H é uma **tautologia**, então existe uma prova de H por *tableaux*.
(Se $\models H$, então $\vdash H$), onde $\vdash H$ denota uma prova no sistema Tb_a.

Teorema da correção

Se existe uma prova de H no sistema Tb_a, então H é uma tautologia.
(Se $\vdash H$, então $\models H$).

Consequência lógica de conjunto de hipóteses

Dada uma fórmula H, e um conjunto de hipóteses,
$\beta = \{A_1, \ldots, A_n\}$
Então H é uma **consequência lógica de** β, por *tableaux* semânticos, se existe uma prova de $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow H$ no sistema Tb_a.
Notações:
$\beta \vdash H$
$\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash H$

Algoritmo da prova por *tableaux* semânticos

Processo para se provar uma fórmula G, dado $\beta = \{A_1, \ldots, A_n\}$:

1. Produzir fórmula $H = (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow G$
2. Negar H: $\neg H$
3. Obter o *tableau* semântico a partir de $\neg H$, aplicando-se as regras $R_1, \ldots, R_9$
4. Caso o *tableau* seja fechado (i.e., todos os seus ramos são fechados), a prova foi concluída.

Considerando que

- Guga é determinado.
- Guga é inteligente.
- Se Guga é determinado e atleta, ele não é um perdedor.
- Se Guga é um amante do tênis, então é um atleta.
- Se Guga é inteligente, então é um amante do tênis.

Verificar se a afirmação "Guga não é um perdedor" é uma consequência lógica dos argumentos acima.

- Guga é determinado:
  P
- Guga é inteligente:
  Q
- Se Guga é determinado e atleta, ele não é um perdedor:
  $(P \land R) \rightarrow \neg P_1$
- Se Guga é um amante do tênis, então é um atleta:
  $Q_1 \rightarrow R$
- Se Guga é inteligente, então é um amante do tênis:
  $Q \rightarrow Q_1$
- Logo,
  $H = (P \land Q \land ((P \land R) \rightarrow \neg P_1) \land (Q_1 \rightarrow R) \land (Q \rightarrow Q_1)) \rightarrow \neg P_1$

1.	$\neg((P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)) \rightarrow \neg P_1)$	$\neg H$
2.	$P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \rightarrow \neg P_1) \wedge (Q_1 \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow Q_1)$	$R_8, 1.$
3.	$\neg\neg P_1$	$R_8, 1.$
4.	P	$R_1, 2.$
5.	Q	$R_1, 2.$
6.	$(P \wedge R) \rightarrow \neg P_1$	$R_1, 2.$
7.	$(Q_1 \rightarrow R)$	$R_1, 2.$
8.	$(Q \rightarrow Q_1)$	$R_1, 2.$
9.	P_1	$R_5, 3.$
	$\swarrow \quad \searrow$	
10.	$\neg Q$ $\qquad$ Q_1	$R_3, 8.$
	fechado $\quad \swarrow \quad \searrow$	
11.	$\neg Q_1$ $\qquad$ R	$R_3, 7.$
	fechado $\quad \swarrow \quad \searrow$	
12.	$\neg(P \wedge R)$ $\qquad$ $\neg P_1$	$R_3, 6.$
	$\swarrow \quad \searrow$ $\qquad$ **fechado**	
13.	$\neg P$ $\qquad$ $\neg R$	$R_6, 12.$
	fechado **fechado**	

- Como o *tableau* é **fechado**, pelo teorema da correção, H é tautologia.
- Logo, "Guga não é um perdedor" é uma consequência das afirmações anteriores.

Exemplo 2

- Considere os argumentos:
  - Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece se o ingresso é barato.
  - Se Guga joga uma partida de tênis, o ingresso é barato.
- Verifique se a afirmação “Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece” é uma consequência lógica dos argumentos acima.

- Guga joga uma partida de tênis:
  P
- A torcida comparece:
  Q
- O ingresso é barato:
  R

$$G = ((P \to (R \to Q)) \wedge (P \to R)) \to (P \to Q)$$

1.	$\neg(((P \to (R \to Q)) \land (P \to R)) \to (P \to Q))$	$\neg G$
2.	$(P \to (R \to Q)) \land (P \to R)$	$R_8, 1.$
3.	$\neg(P \to Q)$	$R_8, 1.$
4.	P	$R_8, 3.$
5.	$\neg Q$	$R_8, 3.$
6.	$P \to (R \to Q)$	$R_1, 2.$
7.	$P \to R$	$R_1, 2.$
	$\swarrow \quad \searrow$	
8.	$\neg P \qquad R \to Q$	$R_3, 6.$
	fechado $\quad \swarrow \quad \searrow$	
9.	$\neg P \qquad R$	$R_3, 7.$
	fechado $\quad \swarrow \quad \searrow$	
10.	$\neg R \qquad Q$	$R_3, 8.$
	fechado $\quad$ **fechado**	

- Como o *tableau* é **fechado**, pelo teorema da correção, G é tautologia.
- Logo, "Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece" é uma consequência das afirmações anteriores.

Conjunto insatisfazível

Um conjunto β, por exemplo, dado por:

$$\beta = \{\neg P \vee Q, \neg(Q \vee \neg R), R \rightarrow P_1, \neg(\neg P \vee P_1)\}$$

é **insatisfazível** ou **não-satisfazível**.
Basta verificar que a fórmula
$H = \neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg(Q \vee \neg R) \wedge (R \rightarrow P_1) \wedge \neg(\neg P \vee P_1))$
é uma tautologia (exercício). **Dica:** resolva o tableau iniciado com $\neg H$, que nada mais é do que a conjunção entre as fórmulas do conjunto.

Exercícios I

1. Faça as seguintes demonstrações utilizando *tableaux* semânticos:
    1. $P \rightarrow P$
    2. $\neg(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge (\neg Q))$
    3. $(P \vee (P \wedge \neg P)) \leftrightarrow P$

2. Demonstre os seguintes teoremas usando *tableaux* semânticos:
   1. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
   2. $((A \to (A \to B)) \land A) \to B$
   3. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
   4. $((A \to B) \land \neg B) \to \neg A$
   5. $((A \lor B) \lor C) \to (A \lor (B \lor C))$
   6. $(P \to Q) \to ((\neg P \to Q) \to Q)$

7. O funcionário é demitido se o chefe o indica ou os colegas o escolhem. Se o funcionário é demitido e chora, então ele conquista os clientes. Se o funcionário conquista os clientes, ele não vai embora. O chefe indicou um funcionário e ele foi embora. Logo, o funcionário não chorou.
8. Se o programa é bom ou passa no horário nobre, o público assiste. Se o público assiste e gosta, então a audiência é alta. Se a audiência é alta, a propaganda é cara. O programa passa no horário nobre, mas a propaganda é barata. Logo, o público não gosta do programa.
9. Se Joana sente dor estômago, ela fica irritada. Se Joana toma remédio para dor de cabeça, ela sente dor de estômago. Joana não está irritada. Logo, ela não tomou remédio para dor de cabeça.

Referências

1. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.
2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação e Áreas Afins*, Elsevier, 3a. edição, 2015.