Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação
FACOM32105 – Lógica para Computação
2023/2
Prof. Renato Pimentel

Lista de exercícios 4 – Lógica de predicados: sintaxe e semântica

1. Elimine o máximo de símbolos de pontuação das fórmulas que seguem, mantendo a interpretação original.

   (a) $((\forall x)(p(x) \to q(x)))$

   (b) $(((\forall x)p(x) \to q(y)) \to ((\forall z)q(z)))$

   (c) $(((\exists y)(\forall z)p(z)) \wedge r(z)) \vee ((\forall x)q(x))$

2. Seja E uma fórmula e x uma variável. Responda, justificando:

   (a) É possível haver ocorrências de x em E livres e ligadas?

   (b) É possível a variável x ser livre e ligada em E ao mesmo tempo?

3. Determine os fechos universal e existencial das fórmulas a seguir:

   (a) $F_1 = p(x, y)$

   (b) $F_2 = (\exists x)p(x, y)$

   (c) $F_3 = (\exists y)(\exists x)p(x, y)$

   (d) $F_4 = (\exists x)(\exists y)p(x, y)$

   (e) $F_5 = (\exists y)(\forall x)p(x, y)$

   (f) $F_6 = (\exists y)p(x, y) \to q(x)$

   (g) $F_7 = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \to q(x)$

   (h) $F_8 = (\forall x)(p(x, y) \to q(x))$

4. Dada a fórmula a seguir:
   $E = (\forall w)(\forall z)(\forall z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z) \to (\forall y)q(z, y, x, z_1))$,
   determine seus subtermos e subfórmulas.

5. Existe fórmula ou expressão sem símbolos livres?

6. Quais os símbolos livres de uma fórmula fechada?

7. Toda variável é símbolo livre?

8. Dê um exemplo de:
   (a) Uma fórmula cujo fecho existencial contém apenas quantificadores universais.
   (b) Uma fórmula cujo fecho universal ou existencial não contém quantificadores.
   (c) Uma fórmula cujo fecho universal ou existencial é igual a ela própria.

9. Traduza as sentenças que seguem para a lógica de predicados:
   (a) Uma condição necessária e suficiente para que um indivíduo seja produtivo é que ele seja esforçado, trabalhe muito e tenha inspirações.
   (b) Nem todo pássaro voa.
   (c) Todo político é desonesto.
   (d) Toda pessoa ama alguém, mas não existe ninguém que ame todas.
   (e) Todo irmão do pai de Pedro é seu tio.
   (f) Zé e Chico são amigos. Mas nem todo amigo de Zé é amigo de Chico e vice-versa
   (g) Os gatos e cachorros são animais domésticos.
   (h) Alguns cavalos não são brancos
   (i) Homens são mamíferos e tomates são vegetais.
   (j) Se alguém não ama ninguém, todos não amam todos.

10. Se possível, determine interpretações que interpretem as fórmulas a seguir como verdadeiras e como falsas. Justifique suas respostas.
   (a) $(\forall x)(\exists y)p(x,y,z) \rightarrow (\exists y)(\forall z)p(x,y,z)$
   (b) $(\forall x)p(x) \leftrightarrow (\exists y)q(y)$
   (c) $(\forall x)(\forall x)p(x,y) \rightarrow (\exists y)q(z)$

11. Usando os seguintes símbolos:

    $p(x) =$"x é uma pessoa" $q(x) =$"x é um período de tempo" $r(x,y) =$"x é enganado por y"

    Formalize os seguintes enunciados, no domínio formado pelo mundo inteiro:

(a) Você pode enganar algumas pessoas durante todo o tempo.
(b) Você pode enganar todas as pessoas durante algum tempo.
(c) Você não pode enganar todas as pessoas durante todo o tempo.

12. Supondo os seguintes símbolos:

- $A(x, y) =$“x ama y”
- $j =$“João”, $c =$“Cátia”
- $V(x) =$“x é vistoso”, $H(x) =$“x é um homem”, $M(x) =$“x é uma mulher”, $B(x) =$“x é bonita”

Dê versões para o português para as fórmulas apresentadas abaixo:

(a) $V(j) \land A(c, j)$
(b) $(\forall x)(H(x) \to V(x))$
(c) $(\forall x)(M(x) \to (\forall y)(A(x, y) \to (H(y) \land V(y))))$
(d) $(\exists x)(H(x) \land V(x) \land A(x, c))$
(e) $(\exists x)(M(x) \land B(x) \land (\forall y)(A(x, y) \to (V(y) \land H(y))))$
(f) $(\exists x)(M(x) \land B(x) \to A(j, x))$

13. Seja I uma interpretação sobre o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que $I[a] = 5$, $I[b] = 3$, $I[x] = 7$, $I[p(x)] = T \Leftrightarrow x_I < 9$, $I[r(x)] = T \Leftrightarrow x_I > 4$, $I[q(x)] = T \Leftrightarrow x_I = 7$.

Determine o resultado da interpretação de cada uma das fórmulas a seguir, segundo I.

(a) $(\exists x)(p(x) \to (\exists x)r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \to (\exists x)r(x))$
(b) $(\forall x)(p(x) \to (\forall z)r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \lor (\forall x)r(x))$
(c) $((\forall x)p(x) \lor (\forall z)(\forall x)r(x)) \to (\forall x)(p(x) \lor (\exists x)r(x))$
(d) $(\exists z)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$
(e) $(\exists z)(p(x) \to (\exists x)p(a)) \lor (p(x) \to (\forall x)p(b))$
(f) $(p(x) \land q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(p(x) \to q(x))$
(g) $(\exists x)(p(x) \to (\exists x)r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \to (\exists x)r(b))$
(h) $((\exists x)p(x) \to r(b)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \to r(b))$

Adaptado de material cedido pelo prof. José Gustavo de Souza Paiva (FACOM-UFU).

SOUZA, J. N., *Lógica para Ciência da Computação*, 3a. edição, Elsevier, 2015.