Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação
FACOM32105 – Lógica para Computação
2023/2
Prof. Renato Pimentel

Lista de exercícios 5 – Lógica de predicados: propriedades semânticas e métodos de determinação

1. Demonstre que as fórmulas H e G a seguir são equivalentes:

   (a) $H = (\forall x)(\forall y)p(x, y, z)$, $G = (\forall y)(\forall x)p(x, y, z)$
   (b) $H = (\exists x)(\exists y)p(x, y, z)$, $G = (\exists y)(\exists x)p(x, y, z)$
   (c) $H = \neg(\exists x)p(x)$, $G = (\forall y)\neg p(x)$
   (d) $H = (\exists x)p(x)$, $G = (\exists y)p(y)$
   (e) $H = (\forall x)p(x)$, $G = (\forall y)p(y)$
   (f) $H = (\forall x)(\forall x)p(x)$, $G = (\forall x)p(x)$

2. Mostre que as fórmulas a seguir são tautologias:

   (a) $H = (\forall x)p(x) \rightarrow p(a)$
   (b) $H = p(a) \rightarrow (\exists x)p(x)$

3. Verifique se as fórmulas a seguir são tautologias ou não:

   (a) $H = (\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)p(x)$
   (b) $H = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow (\exists y)p(y, y)$

4. Algumas das fórmulas a seguir são válidas (tautologias), outras não. Para cada fórmula, demonstre se ela é válida ou defina uma interpretação que a interprete como sendo falsa.

   (a) $p(x) \rightarrow (\forall x)p(x)$
   (b) $(\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)p(x)$
   (c) $(\exists x)(p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow ((\exists x)p(x) \rightarrow (\exists x)q(x))$
   (d) $(\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow (\exists y)p(y, y)$
   (e) $(\exists x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow (\exists y)p(y, y)$
   (f) $(\exists x)(p(x) \rightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x))$

(g) $(\forall x)(p(x) \lor r(x)) \to ((\forall x)p(x) \lor (\forall x)r(x))$

(h) $((\forall x)p(x) \lor (\forall x)r(x)) \to (\forall x)(p(x) \lor r(x))$

(i) $(\exists x)(p(x) \leftrightarrow r(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \leftrightarrow (\exists x)r(x))$

(j) $(\exists x)(p(x) \to p(a)) \land (p(x) \to p(b))$

(k) $(\exists x)(\forall y)(q(x,y) \land q(y,x)) \to (q(x,x) \leftrightarrow q(y,y))$

(l) $(\forall x)(p(x) \land q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(p(x) \to \neg q(x))$

(m) $(\forall x)(p(x,a) \to (\forall x)q(x,b)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x,b) \to (\forall x)q(x,a))$

(n) $(\forall x)(p(x,a) \to (\forall x)q(x,b)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x,a) \to (\forall x)q(x,b))$

(o) $(\forall x)(p(x) \to q(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \to (\forall x)q(x))$

(p) $(\forall y)p(y) \to (\forall x)p(x)$

(q) $(\exists x)p(x) \to p(x)$

(r) $(\forall x)p(x) \to p(x)$

(s) $p(x) \to (\exists x)p(x)$

5. Demonstre que:

(a) $\forall d \in D, < x \leftarrow d > I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)] = I[(\exists y)(\forall x)p(x,y)]$

(b) $\forall d \in D, < x \leftarrow d > I[(\forall x)p(x,y)] = I[(\forall x)p(x,y)]$

(c) $\forall d \in D, < x \leftarrow d > I[q(y)] = I[q(y)]$

6. Demonstre que:

(a) Se $E_1 = (\exists x)(p(x) \lor q(x))$ e $E_2 = (\exists x)p(x) \lor (\exists x)q(x)$, então E_1 equivale a E_2.

(b) Se $E_1 = (\forall x)(p(x) \to q(x))$ e $E_2 = (\exists x)p(x) \to (\forall x)q(x)$, então E_2 implica em E_1, mas E_1 não implica em E_2.

7. (a) Defina uma fórmula H, tal que H seja satisfazível e $(\exists *)H$ seja válida.

(b) Defina uma fórmula G, tal que G seja satisfazível e $(\exists *)G$ não seja válida.

(c) Responda, justificando sua resposta, se a afirmação a seguir é verdadeira ou não:

Dada uma fórmula H, então H é satisfazível se, e somente se, $(\exists *)H$ é válida.

8. Determine se as asserções a seguir são válidas:

   (a) Todo político é esperto. Nenhum cientista é esperto. Portanto, nenhum cientista é político.

   (b) Todo homem é mortal. Sócrates é homem. Portanto, Sócrates é mortal.

   (c) Quando não se ama, não ama ninguém.

Adaptado de material cedido pelo prof. José Gustavo de Souza Paiva (FACOM-UFU).

SOUZA, J. N., *Lógica para Ciência da Computação*, 3a. edição, Elsevier, 2015.