FACOM32105 – Lógica para Computação

Prof. Renato Pimentel

2025/2

Sumário

1 Introdução à lógica **5**
1.1 Conceitos básicos 5

I Lógica proposicional **8**

2 Sintaxe **9**
2.1 Lógica e linguagem 9
2.2 Fórmulas da lógica proposicional 10
2.3 Variáveis 14

3 Semântica **16**
3.1 Interpretação 16
3.2 Os conectivos 19
3.3 Necessidade e suficiência 24
3.4 Exercícios 25

4 Propriedades semânticas da lógica proposicional **28**
4.1 Introdução 28
4.2 Propriedades semânticas 28
4.3 Relações entre as propriedades semânticas 33

5 Métodos de determinação das propriedades semânticas **36**
5.1 Método da tabela-verdade 36
5.2 Método da árvore semântica 37
5.3 Método do absurdo ou negação 39

6 Relações semânticas entre os conectivos **43**
6.1 Introdução 43
6.2 Conjunto de conectivos completos 44
6.3 O conectivo nand 46
6.4 Formas normais 47

7 Sistema axiomático **51**
7.1 Introdução 51
7.2 Sistema axiomático 52
7.3 Exercícios 56

8 *Tableaux* semânticos **58**
8.1 Introdução 58
8.2 O sistema de *tableaux* semânticos Tb_a 59
8.3 Consequência lógica no sistema de *tableaux* semânticos Tb_a . . . 62
8.4 Exercícios 68

9 Resolução **69**
9.1 Introdução 69
9.2 Resolução na lógica proposicional 69
9.3 Consequência lógica no sistema de resolução Rs_a 72
9.4 Exercícios 76

II Lógica de predicados **78**

10 Sintaxe na lógica de predicados **78**
10.1 Introdução 78
10.2 Lógica de predicados 79
10.3 Elementos básicos da linguagem 80
10.4 Fórmulas 83
10.5 Exercícios 89

11 Semântica na lógica de predicados **91**
11.1 Introdução 91
11.2 Interpretação das variáveis, funções e predicados 96
11.3 Exercícios 98
11.4 Interpretação de expressões 99
11.5 Exercícios 102

12 Propriedades semânticas da lógica de predicados **104**
12.1 Introdução 104
12.2 Satisfazibilidade 104
12.3 Validade ou tautologia 105
12.4 Implicação semântica 110
12.5 Exercícios 111

Apresentação

Objetivos e Ementa

Objetivo

- Dominar os conceitos lógicos fundamentais de dedução e validade, correção e completude do Cálculo Proposicional e de Predicados de Primeira Ordem.

Ementa do curso

- Lógica proposicional
  - Linguagem – Sintaxe
  - Semântica
  - As propriedades semânticas
  - Métodos para determinação da validade das fórmulas
  - Sistemas de dedução da lógica proposicional.
- Lógica de predicados de primeira ordem
  - A linguagem
  - Sintaxe
  - Semântica
  - As propriedades semânticas

Bibliografia

Bibliografia básica

- *SOUZA, J. N. Lógica para Ciência da Computação. 2ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.*
- SOUZA, J. N. Lógica para Ciência da Computação e Áreas Afins. 3ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

Conteúdo previsto

1. Introdução a lógica
2. Lógica proposicional: sintaxe.
3. Lógica proposicional: semântica – interpretação, tabela verdade e conectivos, necessidade e suficiência; exercícios.
4. Lógica proposicional: propriedades semânticas.

5. Lógica proposicional: métodos de determinação das propriedades semânticas; exercícios.
6. Lógica proposicional: conjunto de conectivos e formas normais.
7. Lógica proposicional: sistemas de dedução e resolução; exercícios.
8. Lógica de predicados: sintaxe; exercícios.
9. Lógica de predicados: semântica.
10. Lógica de predicados: propriedades semânticas.

Avaliação: aproveitamento e frequência

- 3 provas teóricas:
  - 05/12/2025 ($P1$) – 30 pontos
  - 10/02/2026 ($P2$) – 30 pontos
  - 13/03/2026 ($P3$) – 40 pontos
- Nota final (aproveitamento):

$$NF = P1 + P2 + P3$$

- TDEs – trabalhos discentes efetivos: complementações de carga horária, a serem feitas ao longo do curso, na forma de listas de exercícios.

Avaliação substitutiva

- Alunos que não atingiram a nota 60 *(somente)* terão direito a uma prova substitutiva (SUB).
- Data: 20/03/2026
- O conteúdo da prova será o visto ao longo de todo o semestre.
- A prova substitutiva vale 100 pontos, eliminando a soma das 3 provas, *caso maior que a mesma*, *até o limite de 60 pontos*.
- A NF neste caso será dada por

$$NF = \begin{cases} 60, \text{ se } SUB \geq 60 \\ \max\left(P1 + P2 + P3, SUB\right), \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

  ou seja, o aluno que ficou de SUB *terá nota máxima 60*, caso atinja na mesma a pontuação necessária para ser aprovado.

Frequência

- O aluno que tiver frequência inferior a 75% é reprovado por faltas.
- A assiduidade será computada através da chamada em sala durante as aulas, em um horário aleatório após 10 minutos do início de cada encontro diário. O professor poderá adotar, a seu critério, caso haja demasiada desistência de continuidade em sala, uma segunda chamada ao final do segundo horário de aula.
- *Falta em dia de prova*: o aluno somente terá direito a fazer prova em nova data caso apresente justificativa prevista pelas Normas de Graduação.
- É responsabilidade do aluno controlar sua frequência, de modo a evitar reprovação por falta.
- O professor não corrigirá atividades de alunos que já tenham sido reprovados por falta. Inclusive, os mesmos não terão direito à SUB (Normas da Graduação).

Logística

Aulas

- Terças-feiras: 20:50 até 22:30 – *Sala 1B102*
- Sextas-feiras: 19:00 até 20:40 – *Sala 1B102*

Atividades extraclasse

- Listas de exercícios (fixação) – complementação de carga horária.
- *Teams:* Equipe **FACOM32105 – 2025/2**, código de inscrição *6grf7v7*.

Atendimento e outras informações

- Professor: Renato Pimentel
  - Página: http://www.facom.ufu.br/∼rpimentel
  - E-mail: rpimentel @ ufu . br
  - Sala 1B139
- Atendimento (agendar previamente através de e-mail):
  - Quartas-feiras, 14:00 até 15:40, sala 1B139
  - Quintas-feiras, 19:00 até 20:40, sala 1B139
- Material da disciplina:
  - http://www.facom.ufu.br/∼rpimentel > Ensino > 2025/2 > FACOM32105 – Lógica para Computação

1 Introdução à lógica

1.1 Conceitos básicos

Lógica
Em lógica, estudam-se os *argumentos*.

Estudamos regras para verificação da *verdade* ou *falsidade* de um *raciocínio*.

Conceitos básicos

- *Raciocínio*: ato característico da inteligência humana.
  - Conhecimento indireto, intermediado por diversos outros conhecimentos prévios.

  Encadear *premissas* e extrair uma *conclusão*.

- *Premissa*: afirmação ou negação a respeito de determinado acontecimento, relação ou propriedade;
  - Também denominada *proposição*.
- *Conclusão*: afirmação ou negação alcançada pelo encadeamento de premissas intermediárias.

Premissas e conclusões
Ordem do encadeamento leva a conclusões.

- premissas maiores – todo;
- premissas menores – caso particular.

Exemplo

- Todo metal é dilatado pelo calor. (*Premissa maior*)
- Ora, a prata é um metal. (*Premissa menor*)
- *Logo, a prata é dilatada pelo calor. (Conclusão)*

Outro exemplo

- Todo brasileiro é sul-americano. (*Premissa maior*)
- Ora, todo paulista é brasileiro. (*Premissa menor*)
- *Logo, todo paulista é sul-americano. (Conclusão)*

Lógica

Declarações podem vir ou não acompanhadas de uma *prova* ou *demonstração*.

- Lógica se apoia na apresentação dessa prova.

Lógica

- Estudo sobre a natureza do raciocínio e do conhecimento.
- Usada ex. para *formalizar* e *justificar* os elementos do raciocínio empregados nas demonstrações / provas de teoremas.

Verdadeiro / falso

Classicamente, lógica se baseia num mundo *bivalente* ou *binário*

- Conhecimento representado por sentenças que somente podem assumir dois valores: *verdadeiro* ou *falso*.

Demonstração

Meio de descobrir uma verdade pré-existente desse mundo (mas não conhecida), a partir de verdades já conhecidas.

- Em outras palavras, trata das conclusões a que chegamos através da apresentação de evidências que a sustentam.

Regras da lógica especificam o significado de sentenças matemáticas.

Exemplos:

1. Existe um número inteiro que não é a soma de dois quadrados.
2. Para cada inteiro positivo n, a soma dos inteiros positivos menores ou iguais a n é $n(n+1)/2$.

A lógica representa a base de todo o raciocínio matemático e raciocínio automatizado.

Aplicações da lógica

- Desenvolvimento de máquinas de computação (circuitos lógicos);
- Programação de computadores e linguagens de programação;
- Representação de conhecimento (inteligência artificial);
- Verificação e correção de sistemas.

Estudo da lógica

1. Especificação de uma linguagem:
   - Sintaxe, semântica.
2. Métodos de produção e verificação de fórmulas.
3. Definição de sistemas de dedução formal:
   - Prova, consequência lógica;
   - Derivação de conhecimento.

Referências

1. MARTINS, L. G. A. *Apostila de lógica proposicional*, FACOM, UFU.
2. PAIVA, J. G. S. Lógica para Computação. Introdução – notas de aula.
3. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.
4. SOUZA, J. N. *Lógica Matemática*. Video-aulas em https://www.youtube.com/playlist?list=PLf0uuzm1GgEDEnqzQLJEKrqwDgjEB0uQ1

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU

LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU

Parte I
Lógica proposicional

Lógica proposicional

Forma mais simples da lógica:

- Fatos do mundo real representados por sentenças sem argumento → *proposições*;
- *Proposição* – Sentença de qualquer natureza que pode ser qualificada como *verdadeira* ou *falsa*.

Exemplos

- $1 + 1 = 2$
- $0 > 1$

Frases

Se não é possível definir a interpretação (verdadeiro ou falso) da sentença, ela não é uma proposição.

Exemplos:

- Frases Interrogativas
  - Qual o seu nome?
- Frases Imperativas:
  - Preste atenção!
- Paradoxos Lógicos ou ambiguidades:
  - Esta frase é falsa.
  - Toda regra tem uma exceção.
  - Eu vi Carlos com um relógio.

Tempo e significado

Lógica proposicional: ênfase no *significado* das sentenças.

- *Tempo:* irrelevante

Ex. São equivalentes:

- João *tomou* café
- O café foi tomado por João
- João *toma* café
- João *tomará* café

Exercício 1

Verifique, justificando, se as expressões abaixo são proposições:

- Brasília é a capital do Brasil
- Uberlândia fica em Goiás
- $1 + 1 = 2$
- $2 + 2 = 3$
- $x + 1 = 2$
- $x + y = z$
- Leia isto cuidadosamente

Exercício 2

Verifique, justificando, se as expressões abaixo são proposições:

- Boa sorte!
- Todas as mulheres possuem sua beleza
- Márcio não é irmão do Mário
- Não faça isso!
- Cecília é escritora.
- Quantos japoneses moram no Brasil?

2 Sintaxe

2.1 Lógica e linguagem

Linguagem

Representação do conhecimento.

- Duas partes:
  - *Sintaxe* – símbolos e notações
  - *Semântica* – significado, entendimento
- Definição semelhante à realizada em outras linguagens:
  - *Alfabeto*
  - *Palavras*

Alfabeto

Conjuntos de símbolos visuais, que produzem o que a linguagem quer dizer.

Alfabeto da lógica proposicional:

- Símbolos de pontuação: (,);
- Símbolos de verdade: *true*, *false*;
  - Algumas referências: $\top$ (*verum*) e $\bot$ (*falsum*)
- Símbolos proposicionais: P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, $\ldots$;
- *Conectivos* proposicionais: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Conectivos

- $\neg$: "não" ou *negação*
- $\wedge$: "e" ou *conjunção*
- $\vee$: "ou" ou *disjunção*
- $\rightarrow$: "se então" ou "implica"
- $\leftrightarrow$: "se, e somente se", "sse" ou ainda, *bi-implicação*.

2.2 Fórmulas da lógica proposicional

Fórmulas

- Representam as palavras/frases da lógica proposicional
  - Concatenação de símbolos do alfabeto
- Gramática
  - Nem todas as combinações são válidas
- Princípio: obtenção de fórmulas complexas a partir de fórmulas simples
  - É possível obter um conjunto infinito de fórmulas

Regras

1. Todo símbolo de verdade é uma fórmula;
2. Todo símbolo proposicional é uma fórmula;
3. Se H é uma fórmula, então $(\neg H)$ é uma fórmula;
4. Se H e G são fórmulas, então $(H \vee G)$ é uma fórmula (*disjunção de H e G*);

5. Se H e G são fórmulas, então $(H \wedge G)$ é uma fórmula (*conjunção de H e G*);

6. Se H e G são fórmulas, então $(H \to G)$ – *implicação de H em G* – é uma fórmula (H é o antecedente, e G consequente);

7. Se H e G são fórmulas, então $(H \leftrightarrow G)$ – *bi-implicação de H em G* – é uma fórmula (H é o lado esquerdo, e G o lado direito).

Fórmulas mal formadas

As concatenações dos símbolos que seguem não constituem fórmulas:

- PR
- $(R\,\text{true} \leftrightarrow)$
- $(\text{true} \to\leftrightarrow (R\,\text{true} \to))$

Note que não é possível obtê-las a partir das regras apresentadas.

Simplificação da notação

- Parênteses ou símbolos são omitidos nas fórmulas quando não há problemas sobre sua interpretação.
- Também é possível usar *múltiplas linhas* para melhor leitura.

Por exemplo:

$$(((P \vee R) \to \text{true}) \leftrightarrow (Q \wedge S))$$

pode ser reescrita como

$$\begin{gathered}(P \vee R) \to \text{true} \\ \leftrightarrow \\ Q \wedge S\end{gathered}$$

ou ainda

$$((P \vee R) \to \text{true}) \leftrightarrow (Q \wedge S)$$

Exercícios

1. Dados os símbolos proposicionais P e Q, mostre que $((P \wedge Q) \vee ((\neg P) \rightarrow (\neg Q)))$ é uma fórmula proposicional.

2. Verifique se as fórmulas a seguir são válidas:

   (a) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \rightarrow P)$;

   (b) $(P \vee \neg PQ) \rightarrow (Q \wedge \neg Q)$;

   (c) $\neg((P \wedge \neg\neg Q) \rightarrow \neg R)$;

   (d) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg \rightarrow \neg P)$;

   (e) $((Q \wedge R) \vee \neg(\neg Q \vee P) \vee (P \wedge \neg R)) \rightarrow (R \vee \neg P)$.

Ordem de precedência

Ordem de aplicação dos símbolos conectivos. Similar ao que ocorre na matemática.

- Exemplo:

$$2 + 4 \times 5 \rightarrow (2 + (4 \times 5))$$

- Em alguns casos, não há ordem de precedência:

$$4 \times 6/3 \rightarrow ((4 \times 6)/3) \text{ ou } (4 \times (6/3))$$

Precedência na lógica proposicional

1. $\neg$

2. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

3. $\vee$, $\wedge$

Em alguns casos, não há precedência nos símbolos, e múltiplas interpretações são possíveis.

Pode-se usar múltiplas linhas para facilitar a compreensão nesse caso.

Exercícios

- Elimine o maior número possível de parênteses da fórmula, sem alterar seu significado original

$$((\neg X) \vee ((\neg(X \vee Y)) \vee Z))$$

- Identifique quais fórmulas pertencem à lógica proposicional. Justifique sua resposta, apresentando as regras de construção utilizadas ou apontando uma concatenação inválida.

  (Para as fórmulas válidas, remova os símbolos de pontuação sem afetar sua interpretação)

  - $(P \wedge Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow P) \vee (\neg(\neg R)))$
  - $\vee Q \rightarrow R$
  - $(P \vee R) \rightarrow (Q \leftrightarrow ((\neg T) \wedge R))$
  - $(PQ \vee True)$
  - $((\neg(\neg P)) \leftrightarrow ((\neg((\neg(\neg(P \vee Q))) \rightarrow R)) \wedge P))$
  - $(\neg P \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg\neg R \vee \neg P))$

Comprimento de uma fórmula

- Notação: $\text{comp}\,[H]$
- *Definição*:
  - Se H é um símbolo proposicional ou de verdade, então $\text{comp}\,[H] = 1$
  - Se H e G são fórmulas da Lógica Proposicional, então:
    * $\text{comp}[\neg H] = \text{comp}[H] + 1$
    * $\text{comp}[H \vee G] = \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1$
    * $\text{comp}[H \wedge G] = \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1$
    * $\text{comp}[H \rightarrow G] = \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1$
    * $\text{comp}[H \leftrightarrow G] = \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1$
- Os símbolos de pontuação não são considerados.

Linguagem objeto e meta-linguagem

- *Linguagem-objeto*: expressa a informação em sua forma original.

  Ex.: Bia is a student
- *Metalinguagem*: expressa uma informação contida na linguagem-objeto, a ideia do que está escrito

  Ex.: "Bia is a student" é uma sentença da língua inglesa.
- O mesmo ocorre na Lógica Proposicional:

  $((P \vee Q \rightarrow \text{true})$ é uma fórmula da lógica proposicional.

2.3 Variáveis

- Facilitam expressão de leis (generalização):

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$$

- Símbolos proposicionais podem ser representados por variáveis do tipo $\breve{P}$, com possíveis sub-índices

  Ex.: $\breve{P}_1$ pode representar qualquer um dos símbolos: P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, ...

As variáveis A, B, C, D, E, H e G com possíveis subíndices representam fórmulas.

- A variável H_2 pode representar, por exemplo, a fórmula $(P \to Q)$

Letras como $\breve{P}$, A, B, C, D, E, H e G são elementos da metalinguagem que representam símbolos proposicionais e fórmulas em geral da lógica proposicional.

Assim, $(\breve{P}_1 \to \breve{P}_2)$ não é uma fórmula da lógica proposicional:

- Essa expressão é a representação de fórmulas do tipo $(P \to Q)$, $(R \to S)$, etc.

- $(H \vee G)$ também não representa uma fórmula, mas a representação de fórmulas tais como

  $((P \to Q) \vee (R \wedge S))$

  - H é substituída por $(P \to Q)$;
  - G é substituída por $(R \wedge S)$.

- Expressões do tipo $(\breve{P}_1 \to \breve{P}_2)$ e $(H \vee G)$ são denominadas *esquemas de fórmulas.*

- Os esquemas de fórmulas se transformam em fórmulas quando as metavariáveis são substituídas por símbolos e fórmulas da lógica.

Subfórmulas

Definição:

- H é subfórmula de H;

- Se $H = (\neg G)$, então G é subfórmula de H;

- Se H é uma fórmula do tipo $(G \vee E)$, $(G \wedge E)$, $(G \to E)$ ou $(G \leftrightarrow E)$, então G e E são subfórmulas de H;

- Se G é subfórmula de H, então toda subfórmula de G é subfórmula de H.

Exercício

Determine as subfórmulas das seguintes fórmulas proposicionais:

- $((\neg\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \wedge \text{true}$
- $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)))$
- $((P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P) \vee Q$
- $\neg(P \rightarrow \neg Q)$

Referências

1. PAIVA, J. G. S. Lógica para Computação. Introdução – notas de aula.
2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.
3. SOUZA, J. N. *Lógica Matemática*. Video-aulas em https://www.youtube.com/playlist?list=PLf0uuzm1GgEDEnqzQLJEKrqwDgjEB0uQ1
4. MARTINS, L. G. A, Apostila de Lógica Proposicional, FACOM, UFU.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU

3 Semântica

Significados

- *Semântica*: associação de um *significado* a cada objeto da lógica
- Mesma fórmula $\Rightarrow$ diferentes significados
- Exemplo:

$$P \rightarrow Q$$

  - P: "Está chovendo";
  - Q: "A rua está molhada".

- As fórmulas podem ser *verdadeiras* ou *falsas*
  - Dependência de vários fatores

Programação

- Mundo lógico
  - Mundo sintático – símbolos do alfabeto
    - *Fórmulas* – concatenações de símbolos
  - Mundo semântico – *significado* dos símbolos e fórmulas
- Importância na computação – computador é uma máquina estritamente sintática.
  - É necessário fornecer um significado aos símbolos por ela manipulada
- *Programação* – tradução de um conhecimento semântico para um programa sintático

3.1 Interpretação

Associação de um *valor verdade* para cada fórmula da Lógica Proposicional

- *Domínio*: conjunto das fórmulas da lógica proposicional
- *Contradomínio*: conjunto $\{T, F\}$ (função binária)
- Valores:
  - Dado símbolo proposicional P, então $I[P] \in \{T, F\}$
  - $I[\text{true}] = T$, $I[\text{false}] = F$
- Lógica *bivalente* – simplificação do mundo real.

Interpretação de fórmulas

- *Fórmulas:* concatenação de símbolos.

  A interpretação das fórmulas consiste na interpretação de seus símbolos

- Conjunto de regras: de acordo com símbolos proposicionais, de verdade e conectivos lógicos na fórmula.

Regras de interpretação

Dadas uma fórmula E e uma interpretação I:

1. Se E é do tipo $\breve{P}$ (um símbolo proposicional), então $I[E] = I[\breve{P}]$, e $I[\breve{P}] \in \{T, F\}$;
2. Se E é true, então $I[E] = I[\text{true}] = T$;
3. Se E é false, então $I[E] = I[\text{false}] = F$;
4. Se H é uma fórmula e E é do tipo $\neg H$:
   - $I[E] = I[\neg H] = T$ se $I[H] = F$;
   - $I[E] = I[\neg H] = F$ se $I[H] = T$;
5. Se H e G são fórmulas e E é do tipo $(H \vee G)$:
   - $I[E] = I[H \vee G] = T$ se $I[H] = T$ e/ou $I[G] = T$.
   - $I[E] = I[H \vee G] = F$ se $I[H] = F$ *e* $I[G] = F$.
6. Se H e G são fórmulas e E é do tipo $(H \wedge G)$:
   - $I[E] = I[H \wedge G] = T$ se $I[H] = T$ *e* $I[G] = T$.
   - $I[E] = I[H \wedge G] = F$ se $I[H] = F$ e/ou $I[G] = F$.
7. Se H e G são fórmulas e E é do tipo $(H \rightarrow G)$:
   - $I[E] = I[H \rightarrow G] = T$ se $I[H] = F$ e/ou $I[G] = T$.
   - $I[E] = I[H \rightarrow G] = F$ se $I[H] = T$ *e* $I[G] = F$.
8. Se H e G são fórmulas e E é do tipo $(H \leftrightarrow G)$:
   - $I[E] = I[H \leftrightarrow G] = T$ se $I[H] = I[G]$;
   - $I[E] = I[H \leftrightarrow G] = F$ se $I[H] \neq I[G]$.

Exercício

Interprete a letra sentencial C como "Está chovendo", e N como "Está nevando" e expresse a forma de cada sentença na notação do cálculo proposicional:

- Está chovendo.
- Não está chovendo.
- Está chovendo ou nevando.
- Está chovendo e nevando.
- Está chovendo mas não está nevando.
- Não é o caso que está chovendo e nevando.
- Se não está chovendo, então está nevando.
- Não é o caso que se está chovendo então está nevando.
- Está chovendo se e somente se não está nevando.
- Não é o caso que está chovendo ou nevando.
- Se está nevando e chovendo, então está nevando.
- Ou está chovendo, ou está nevando e chovendo.
- Ou está chovendo e nevando, ou está nevando mas não está chovendo.

Exercício

Dadas as proposições

- P: Gosto de viajar
- Q: Visitei o Chile,

represente as seguintes proposições verbalmente:

- $P \leftrightarrow Q$
- $\neg Q \rightarrow \neg P$
- $(P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P$
- $Q \rightarrow \neg P$
- $\neg(P \rightarrow Q)$

Exercício

Descreva as sentenças abaixo em termos de proposições simples e operadores lógicos

- Se elefantes podem subir em arvores, então 3 é número par
- $\pi > 0$ se e somente se não é verdade que $\pi > 1$
- Se as laranjas são amarelas, então os morangos são vermelhos
- É falso que se Montreal é a capital do Canadá, então a próxima copa será realizada no Brasil
- Se é falso que Montreal é a capital do Canadá, então a próxima copa será realizada no Brasil

Exemplo

Sejam P e Q duas proposições. Demonstrar com a ajuda da definição de interpretação dos conectivos que: $(P \to Q)$ equivale a $(Q \vee \neg P)$.

- *Para* $I[P \to Q] = T$: $I[P] = F$ e/ou $I[Q] = T$
  - Se $I[P] = F \Rightarrow I[\neg P] = T \Rightarrow I[Q \vee \neg P] = T$;
  - Se $I[Q] = T \Rightarrow I[Q \vee \neg P] = T$.
- *Para* $I[P \to Q] = F$: $I[P] = T$ e $I[Q] = F$
  - Se $I[P] = T$ e $I[Q] = F \Rightarrow I[\neg P] = F$ e $I[Q] = F \Rightarrow I[Q \vee \neg P] = F$

Exercício

Sejam P e Q duas proposições. Demonstrar com a ajuda da definição de interpretação dos conectivos que:

- $P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
- $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$

3.2 Os conectivos

- Não se faz interpretação dos conectivos lógicos isoladamente
  - Tais símbolos não fazem parte do domínio da função I
- No entanto, analisa-se as possibilidades de significados considerando a utilização desses conectivos
- Tais possibilidades são representadas em uma *tabela-verdade* associada aos conectivos proposicionais

Tabela-verdade dos conectivos

H	G	$H \wedge G$	$H \vee G$	$H \rightarrow G$	$H \leftrightarrow G$	$\neg H$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

Interpretação de fórmulas

- Existem também tabelas-verdade associadas às fórmulas da lógica
- Nesse caso, elas são obtidas das tabelas verdade dos conectivos proposicionais

Exemplo
$H = ((\neg P) \vee Q) \rightarrow (Q \wedge P)$

P	Q	$\neg P$	$(\neg P) \vee Q$	$Q \wedge P$	H
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F

Exercício
Defina os resultados abaixo de acordo com as interpretações:

- $E = ((\neg P) \vee (\neg Q)) \rightarrow R$,
  $H = (\text{false} \rightarrow P)$
  - $I[P] = T$, $I[Q] = F$, $I[R] = T$
  - $J[P] = F$, $J[Q] = T$, $J[R] = F$
- $E = ((\neg P) \wedge Q) \rightarrow (R \vee P)$
  - Todas as interpretações

Exercício
Construa as tabelas verdade para as seguintes fórmulas

- $\neg((P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg R)$
- $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
- $(P \wedge Q \wedge R) \vee \neg(\neg Q \vee P) \vee (P \wedge \neg R)) \rightarrow (R \vee \neg P)$

O conectivo $\neg$

- Expressa uma negação que nem sempre ocorre nas línguas naturais. Ex.:
  - João é rico
  - *Negação*: João não é rico
- Nem sempre existe uma correspondência entre a negação nas linguagens naturais e na lógica. Exs.:
  - Carlos é feliz
  - Ana é namorada de Fábio

O conectivo $\vee$

- Nem sempre é equivalente ao *ou* das línguas naturais:
  - Termos podem não ser relacionados
  - Não existe exclusividade
    - 3 possibilidades possíveis, e não 2 como nas línguas naturais
- Exemplos:
  - Hoje é quinta-feira ou o carro é azul
  - Vou ao cinema ou ao teatro
  - Está chovendo ou fazendo sol
  - Carla está grávida de menino ou menina

O conectivo $\wedge$

- Pode ser representado, em línguas naturais como
  - e, mas, todavia
  - Nuances perdem o significado quando a sentença é traduzida para a lógica
- *Comutatividade*: nem sempre garantida nas línguas naturais (sem relações temporais ou causais). Exs.:
  - Tiago pulou na piscina e se molhou
  - Laura estudou para a prova e tirou uma boa nota

O conectivo $\rightarrow$

- Implicação condicional
  - Hipótese resultando em uma conclusão
  - Obrigação, contrato
- Exemplos
  - "Se eu for eleito, diminuirei os impostos"
  - "Se você tirar nota 10 no exame final, terá conceito A"
  - "Se x é um número real maior que 10, então x^2 é um número real maior que 100"

Análise
"Se eu passar na prova, vou viajar."

Podemos formalizá-la como $A \rightarrow B$.

Considerando todas as combinações entre verdadeiro e falso para as letras sentenciais A e B:

1. A é verdadeiro e B também o é. (linha 1 da tabela-verdade)

   Situação: Passei na prova e viajei. Logo, a afirmação é verdadeira.

2. A é verdadeiro e B é falso. (linha 2 da tabela-verdade)

   Situação: Passei na prova e não viajei. Logo, a afirmação é falsa, pois eu havia afirmado que, se passasse na prova, viajaria.

3. A é falso e B é verdadeiro. (linha 3 da tabela-verdade)

   Situação: Não passei na prova e viajei. Logo, a afirmação é verdadeira, pois eu não afirmei que, se não passasse na prova, não iria viajar

4. A é falso e B também o é. (linha 4 da tabela-verdade)

   Situação: Não passei na prova e não viajei. Logo, a afirmação é verdadeira

Outras interpretações:

- "Maria vai conseguir um bom emprego quando aprender Matemática."
- "Para conseguir um bom emprego, é suficiente que Maria aprenda Matemática."
- "Maria vai conseguir um bom emprego, a menos que não aprenda Matemática."

Todas representam a seguinte frase:

Se Maria aprender Matemática, então conseguirá um bom emprego

- P: Maria aprende Matemática
- Q: Maria consegue um bom emprego

$$P \to Q$$

$\to$: causalidade

- O conectivo $\to$ não expressa a semântica da causalidade
- Em outras palavras, não é necessária a relação de causa e efeito para que $I[H \to G] = T$
  - H não é causa de G
- Isso ocorre porque
  - Se $I[G] = T$, $I[H \to G] = T$, independente do valor de $I[H]$.
  - Se $I[H] = F$, $I[H \to G] = T$, independente do valor de $I[G]$.
- Exemplo:
  - Se hoje é sexta-feira, então $2 + 3 = 5$
  - Se hoje é sexta-feira, então $2 + 3 = 6$
- Não expressamos essas condicionais na língua portuguesa (não existe relação entre hipótese e conclusão).
- No raciocínio lógico, a implicação condicional tem um aspecto mais geral.
- A lógica não tem como base nenhuma linguagem natural, porque é uma linguagem artificial.

$\to$ e proposições correlatas

Dada a proposição $P \to Q$:

- A proposição $Q \to P$ é chamada *oposta*.
- A proposição $\neg Q \to \neg P$ é chamada *contrapositiva*.
- A proposição $\neg P \to \neg Q$ é chamada *inversa*.

Exercício

Verifique se a oposta, contrapositiva e inversa possuem os mesmos valores de tabela verdade de $P \to Q$

- A contrapositiva tem os mesmos valores de tabela verdade da proposição original
  - Quando isso ocorre, chamamos as proposições de *equivalentes*.
- A oposta e a inversa são equivalentes

O conectivo $\leftrightarrow$

- Chamado de *bicondicional*
- Representa a igualdade na interpretação das duas fórmulas envolvidas:
  - "Você pode tomar o avião se e somente se você comprou uma passagem"
  - "Se você pode tomar o avião, comprou passagem"
  - "Se comprou passagem, você pode tomar o avião"
- Nem sempre estão explícitas nas linguagens naturais.
- Raramente utilizadas: frequentemente expressas usando construções como *"se, então"* ou *"somente se"* – restante fica implícito.

  "Se terminar o almoço, então você pode comer a sobremesa"

3.3 Necessidade e suficiência

Necessidade
Pré-requisito para que um fato ocorra.

- $P \to Q$: Q indica o que é necessário para que P ocorra (Se Q é F, então P também deve ser F);
- Sua veracidade ($Q = T$) não é suficiente para garantir que o fato também seja verdade ($P = T$).

Suficiência
Conjunto de todos os pré-requisitos necessários para que um fato ocorra.

- Veracidade desse conjunto garante a veracidade do fato;
- $P \to Q$: P indica o que é suficiente para que Q ocorra.

Considerando duas proposições F e G:

- G é *condição necessária* para F quando G é uma circunstância em cuja ausência F não pode ocorrer;
- F é *condição suficiente* para G se F é uma circunstância em cuja presença G deve ocorrer.
- Se F então G:
  - Ser G é uma condição necessária para ser F;
  - Ser F é uma condição suficiente para ser G.
- Se todo F for G e todo G for F
  - ser G é uma condição necessária e suficiente para ser F.

Exemplos

- "Todo mineiro é brasileiro."
- "Estar na capital do Brasil é condição necessária e suficiente para estar em Brasília."
- "Se Carlos deixar o governo, o pedido de CPI será arquivado."

3.4 Exercícios

Exercício

Determine a *oposta*, *contrapositiva* e *inversa* da seguinte condicional:
"O time da casa ganha sempre que está chovendo"

- *original*: "Se está chovendo, então o time da casa ganha"
- *oposta*: "Se o time da casa ganha, então está chovendo"
- *contrapositiva*: "Se o time da casa não ganha, então não está chovendo"
- *inversa*: "Se não está chovendo, o time da casa não ganha"

Exercício

Três estudantes declararam o seguinte:

- Paulo: "Eu não fiz o teste, mas, se Rogério o fez, Sérgio também fez."
- Rogério: "Eu fiz o teste, mas um de meus colegas não fez."
- Sérgio: "Se Rogério fez o teste, eu também o fiz."

Formalize estas três declarações na linguagem lógica proposicional utilizando o vocabulário abaixo:

- P: Paulo fez o teste.
- R: Rogério fez o teste.
- S: Sérgio fez o teste.

Monte a tabela-verdade das proposições e utilize-a para responder as seguintes questões:

- Se todos estão dizendo a verdade, quem fez o teste?
- Se todos estão mentindo, quem fez o teste?
- Se todos fizeram o teste, quem está dizendo a verdade e quem está mentindo?

Exercício

Escreva cada uma das proposições a seguir na forma de $P \to Q$

- É necessário lavar o carro do chefe para ser promovido
- Ventos do sul implicam em degelo primaveril
- Uma condição suficiente para a garantia ser válida é que você tenha comprado o computador em menos de um ano
- Leo é pego sempre que trapaceia

Exercício

Determine a oposta, a contrapositiva e a inversa de cada uma das proposições condicionais:

- Se nevar esta noite, então ficarei em casa
- Eu vou a praia sempre que faz um dia ensolarado de verão
- Quando me deito tarde, é necessário que eu durma até o meio-dia

Exercício

Sejam as proposições P: "Está chovendo", Q: "O sol está brilhando" e R: "Há nuvens no céu". Traduza as seguintes sentenças abaixo em notação lógica:

- "choverá se o sol brilhar ou se o céu estiver com nuvens."
- "se está chovendo, então há nuvens no céu."
- "o sol brilha quando e apenas quando o céu fica com nuvens."

Traduza as seguintes proposições para o português:

- $(P \wedge Q) \to R$
- $\neg P \leftrightarrow (Q \vee R)$
- $\neg(P \vee Q) \wedge R$

Exercício

Construa a tabela verdade para cada uma das fórmulas dos exercícios anteriores.

Referências

1. GERÔNIMO, J. R. *Exercícios de Lógica*, Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, 2007

2. MARTINS, L. G. A. *Apostila de lógica proposicional*, FACOM, UFU.

3. PAIVA, J. G. S. Lógica para Computação. Introdução – notas de aula.

4. ROSEN, K. H. *Matemática Discreta e suas Aplicações*, Editora McGraw Hill, 6 Ed., 2008

5. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU

LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU

4 Propriedades semânticas da lógica proposicional

4.1 Introdução

- Relacionamento dos resultados das interpretações semânticas de fórmulas
- Teoria dos modelos – estudo das relações entre propriedades sintáticas e semânticas
  - Uma das principais razões da aplicação da lógica à Computação

4.2 Propriedades semânticas

1. Uma fórmula H é uma *tautologia* se, e somente se, para toda interpretação I, $I[H] = T$.
2. Uma fórmula H é *factível* ou *satisfazível* se, e somente se, existe pelo menos uma interpretação I, tal que $I[H] = T$.
3. Uma fórmula H é uma *contingência* se, e somente se, existem duas interpretações I e J, tais que $I[H] = T$ e $J[H] = F$.
4. Uma fórmula H é *insatisfazível*, *contraditória*, *logicamente falsa* ou ainda, *inconsistente* se, e somente se, para toda interpretação I, $I[H] = F$.
5. (*Implicação semântica ou tautológica*) *H implica semanticamente em G* se, e somente se, para toda interpretação I, se $I[H] = T$ então $I[G] = T$.
   - Notação: $H \vDash G$
6. (*Equivalência semântica ou tautológica*) *H equivale semanticamente a G* se, e somente se, para toda interpretação I, $I[H] = I[G]$.

Tautologia e veracidade

A validade (tautologia) representa mais do que a veracidade: Uma fórmula pode ser verdadeira para uma determinada interpretação, mas não ser válida.

Exemplo 1: $H = P \vee \neg P$

- $I[H] = T \Leftrightarrow I[P \vee \neg P] = T \Leftrightarrow I[P] = T$ e/ou $I[\neg P] = T \Leftrightarrow I[P] = T$ e/ou $I[P] = F$.
- Como $I[P] \in \{T, F\}$, então $I[P] = T$ ou $I[P] = F$, e a afirmação $I[P] = T$ e/ou $I[P] = F$ é verdadeira, e $I[H] = T$.

- Assim, a fórmula é uma tautologia

Princípio do terceiro-excluído
Dada uma proposição e sua negação, pelo menos uma delas é verdadeira.

Exemplo 2:

- $H = (P \vee Q)$
  - $I[P] = T$, $I[Q] = F$,
  - $J[P] = F$, $J[Q] = F$
- Temos que $I[H] = T$ e $J[H] = F$.
- Logo, H é *factível* e *contingente*.

Tautologia é um *subconjunto* das fórmulas factíveis.

Exemplo 3:

- $G = (P \wedge \neg P)$
- Suponha que exista I tal que $I[G] = T$.
  - $I[G] = T \Leftrightarrow I[P \wedge \neg P] = T \Leftrightarrow I[P] = T$ e $I[\neg P] = T \Leftrightarrow I[P] = T$ e $I[P] = F$.
- Como $I[P] \in \{T, F\}$, então $I[P] = T$ *ou* $I[P] = F$
- Logo, conclui-se que $I[G] = T$ *é falso*, e portanto $I[G] = F$. Portanto, *a fórmula é uma contradição.*

Exemplo 4:

- $E = ((P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q) \rightarrow Q)$
- Se $I[Q] = T$, então $I[(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q) \rightarrow Q] = T$.
- Se $I[Q] = F$, então $I[P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q] = F$, e assim, $I[(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q) \rightarrow Q] = T$.
- Portanto, a fórmula é uma tautologia.

Exemplo 5:

- $D = ((P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q) \rightarrow \neg Q)$
- Se $I[Q] = T$, então $I[\neg Q] = F$, e não há como saber se $I[P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q] = T$ ou $I[P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q] = F$.
- Se $I[Q] = F$, então $I[P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q] = F$ e $I[\neg Q] = T$. Logo, $I[(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge Q) \rightarrow \neg Q] = T$.

- Portanto, a fórmula é factível.

Exemplo 6:

- $C = (P \vee \neg P) \rightarrow (Q \wedge \neg Q)$
- Para toda interpretação I, $I[P \vee \neg P] = T$.
- Para toda interpretação I, $I[Q \wedge \neg Q] = F$.
- Assim, teremos que $I[(P \vee \neg P) \rightarrow (Q \wedge \neg Q)] = F$, para qualquer interpretação I.
- Portanto, a fórmula é contraditória.

Implicação semântica

Observação importante
A definição diz que, se $I[H] = T$, então $I[G] = T$

No entanto, isso *não* quer dizer que, para toda interpretação I, $I[H] = I[G]$, ou que $I[H] = T$ e $I[G] = T$

- Caso haja uma interpretação J, tal que $J[H] = F$, nada poderá ser dito a respeito de $J[G]$
- Enquanto $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ são símbolos sintáticos para implicação e equivalência, $\vDash$ e $\Leftrightarrow$ são elementos da metalinguagem para representar a implicação e equivalência semântica

Exemplo 7: Tabela verdade das fórmulas

- $E = ((P \wedge Q) \vee Q)$
- $H = (P \wedge Q)$
- $G = (P \rightarrow Q)$

P	Q	E	H	G
T	T	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

É possível notar que:

- E implica em G;
- E não implica em H;
- H implica em G;

- H implica em E;
- G não implica em E;
- G não implica em H.

Exemplo 8:

- $H = (P \wedge Q)$
- $G = P$
- Neste caso, H implica em G;
- Nada se pode dizer a respeito de G implicar em H;
- Ainda, se existir uma interpretação J tal que $J[H] = F$, nada se pode dizer sobre $J[G]$.

Exemplo 9: determinar as relações entre H e G:

- $H = (\neg P \wedge \neg Q)$
- $G = \neg(P \vee Q)$
- Se $I[H] = T$:
  $I[\neg P \wedge \neg Q] = T \Leftrightarrow I[\neg P] = T$ e $I[\neg Q] = T \Leftrightarrow I[P] = F$ e $I[Q] = F \Leftrightarrow I[P \vee Q] = F \Leftrightarrow I[\neg(P \vee Q)] = T$
- Se $I[H] = F$:
  $I[\neg P \wedge \neg Q] = F \Leftrightarrow I[\neg P] = F$ e/ou $I[\neg Q] = F \Leftrightarrow I[P] = T$ e/ou $I[Q] = T \Leftrightarrow I[P \vee Q] = T \Leftrightarrow I[\neg(P \vee Q)] = F$
- Portanto, H e G são equivalentes.

Exercício

Demonstrar pela definição do significado dos conectivos que X implica semanticamente em $Y \to X$.

Exercício

Verifique se as fórmulas abaixo são implicações semânticas:

- $P \vDash \text{true}$
- $(X \neq 0 \to X = Y) \wedge (X \neq Y) \vDash (X = 0)$
- $P \vee (Q \wedge R \wedge S \wedge (Q_1 \to R_1)) \vDash P \wedge \text{true}$
- $(P \leftrightarrow Q) \wedge (P \vee Q) \vDash Q$

Exercício

Descobrir quais das seguintes fórmulas são tautologias, contradições ou factíveis:

- $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$
- $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
- $((P \wedge Q) \wedge Q) \leftrightarrow \neg((Q \wedge P) \wedge P)$
- $(P \rightarrow (P \wedge Q)) \leftrightarrow P$
- $(\neg P \leftrightarrow \neg Q) \vee (P \rightarrow Q)$
- $((P \vee Q) \vee R) \leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$

Equivalências clássicas

Identificação	*fórmula H*	*fórmula G*
Dupla negativa	$\neg(\neg E)$	E
Propriedades de identidade	$E \vee \text{false}$	E
	$E \wedge \text{true}$	E
Propriedades complementares	$E \vee \neg E$	true
	$E \wedge \neg E$	false
Leis de De Morgan	$\neg(E \wedge R)$	$\neg E \vee \neg R$
	$\neg(E \vee R)$	$\neg E \wedge \neg R$
Contraposição	$E \rightarrow R$	$\neg R \rightarrow \neg E$

Identificação	*fórmula H*	*fórmula G*
Propriedades de substituição	$E \rightarrow R$	$\neg E \vee R$
	$E \leftrightarrow R$	$(E \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow E)$
Propriedades comutativas	$E \vee R$	$R \vee E$
	$E \wedge R$	$R \wedge E$
Propriedades associativas	$E \vee (R \vee S)$	$(E \vee R) \vee S$
	$E \wedge (R \wedge S)$	$(E \wedge R) \wedge S$
Propriedades distributivas	$E \vee (R \wedge S)$	$(E \vee R) \wedge (E \vee S)$
	$E \wedge (R \vee S)$	$(E \wedge R) \vee (E \wedge S)$
Prova condicional	$E \rightarrow (R \rightarrow S)$	$(E \wedge R) \rightarrow S$

Satisfabilidade de fórmulas

- Dada uma fórmula H e uma interpretação I, então I *satisfaz* H se, e somente se, $I[H] = T$
- Um conjunto de fórmulas $\beta = \{H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n\}$ *é satisfazível* se existe pelo menos uma interpretação I tal que $I[H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n] = T$

  - Dizemos que $I[\beta] = T$

- *Obs.*: Dado um conjunto de fórmulas vazio, então toda interpretação I o satisfaz

- *Conjuntos de fórmulas satisfatíveis são importantes na computação*:

  - *Programas lógicos* são conjuntos de fórmulas satisfatíveis.

Exemplo 10:

- $H_1 = P$
- $H_2 = \neg P$
- $H_3 = Q$
- Tal conjunto de fórmulas é insatisfazível.

Exemplo 11:

- $H_1 = (P \to Q)$
- $H_2 = (Q \to R)$
- $H_3 = (R \to P)$
- Tal conjunto de fórmulas é satisfazível.

Exemplo 12:

- $H_1 = (P \to Q)$
- $H_2 = (Q \to R)$
- $H_3 = (R \to S)$
- $H_4 = (S \to P)$
- $H_5 = \neg(S \to Q)$
- Tal conjunto de fórmulas é insatisfazível.

4.3 Relações entre as propriedades semânticas

1. *Validade e contradição*

- Dada uma fórmula H, H é válida se, e somente se, $\neg H$ é contraditória.

- Demonstração:

  H é válida $\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[H] = T \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[\neg H] = F \Leftrightarrow \neg H$ é contraditória.

2. *Validade e satisfabilidade*

- Dada uma fórmula H, se H é válida, então H é satisfazível.
- Demonstração:

  H é válida $\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[H] = T$. Portanto, existe ao menos uma interpretação I tal que $I[H] = T$.

3. *Insatisfatibilidade e contradição*

- Dada uma fórmula H, H não é satisfazível se, e somente se, H é uma contradição.
- Demonstração:
  - Se H não é satisfazível, então não existe I tal que $I[H] = T$.
  - Assim, para toda interpretação I, $I[H] = F$.
  - Logo, H é uma contradição.

4. *Implicação semântica e o conectivo* $\rightarrow$

- Dadas duas fórmulas H e G, H implica semanticamente em G se, e somente se, $(H \rightarrow G)$ é uma tautologia.
- Demonstração:

  H implica em $G \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, se $I[H] = T$ então $I[G] = T \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[H \rightarrow G] = T \Leftrightarrow (H \rightarrow G)$ é uma tautologia.

5. *Equivalência e o conectivo* $\leftrightarrow$

- Dadas duas fórmulas H e G, H equivale a G se, e somente se, $(H \leftrightarrow G)$ é uma tautologia.
- Demonstração:

  H equivale a $G \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[H] = I[G] \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[H \leftrightarrow G] = T \Leftrightarrow (H \leftrightarrow G)$ é uma tautologia.

6. *Equivalência e implicação*

- Dadas duas fórmulas H e G, se H equivale a G então H implica semanticamente em G e G implica semanticamente em H.
- Demonstração:

  H equivale a $G \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[H] = I[G] \Leftrightarrow$ para toda interpretação I, se $I[H] = T$ então $I[G] = T$ e se $I[G] = T$ então $I[H] = T \Leftrightarrow H$ implica semanticamente em G e G implica semanticamente em H.

7. *Transitividade da equivalência*

- Dadas as fórmulas E, H e G, se E equivale a H e H equivale a G, então E equivale a G.
- Demonstração:
  - E equivale a $H \Leftrightarrow (E \leftrightarrow H)$ é uma tautologia.
  - H equivale a $G \Leftrightarrow (H \leftrightarrow G)$ é uma tautologia.
  - Se $(E \leftrightarrow H)$ e $(H \leftrightarrow G)$ são tautologias, para toda interpretação I, $I[E] = I[H]$ e $I[H] = I[G]$.
  - Logo, para toda interpretação I, $I[E] = I[G]$, e $(E \leftrightarrow G)$ é uma tautologia, e E equivale a G.

8. *Satisfatibilidade dos conjuntos e factibilidade das fórmulas*

- Seja $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ um conjunto de fórmulas. Então, $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ é satisfazível se, e somente se, $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n)$ é satisfazível.
- Demonstração:
  - $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ é satisfazível $\Leftrightarrow$ existe interpretação I tal que $I[H_1] = I[H_2] = \cdots = I[H_n] = T \Leftrightarrow$ existe interpretação I tal que:
    - $I[H_1 \wedge H_2] = T$ e
    - $I[H_2 \wedge H_3] = T$ e
    - $\ldots$
    - $I[H_{n-1} \wedge H_n] = T$.
  - Isto ocorre se, e somente se, I é tal que $I[H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n] = T \Leftrightarrow (H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n)$ é satisfazível.

Exercício

Demonstre, com o auxílio das equivalências clássicas, que as fórmulas abaixo são equivalentes:

- $Q \rightarrow (Q \wedge P)$ e $(\neg Q \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$.
- $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R$ e $(R \rightarrow P) \wedge (R \rightarrow Q)$
- $(\neg(P \rightarrow Q) \vee S) \wedge \neg P$ e $(P \vee S) \wedge ((Q \rightarrow S) \wedge \neg P)$

Referências

1. MARTINS, L. G. A. *Apostila de lógica proposicional*, FACOM, UFU.
2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU

LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU

5 Métodos de determinação das propriedades semânticas

Introdução

- Análise dos mecanismos que verificam as propriedades semânticas das fórmulas da lógica proposicional.
- Três métodos:
  - Tabela verdade;
  - Árvore semântica;
  - Negação ao absurdo.
- Utilização do método depende da fórmula.

5.1 Método da tabela-verdade

- *Força bruta*: *todas* as possibilidades de valores verdade são consideradas.
- Para uma fórmula H, constituída dos símbolos P_1, P_2, P_3, ..., P_n , são consideradas:
  - $I[P_i] = T$ e $I[P_i] = F$, $1 \leq i \leq n$
  - n símbolos $\Rightarrow 2^n$ possibilidades $\Rightarrow 2^{n+1}$ linhas $\Rightarrow$ não indicado para fórmulas com muitos símbolos.

Exemplo 1: $H = \neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$.

- H é uma tautologia (Lei de De Morgan)
  - Define uma regra para distribuição do conectivo $\neg$ em uma conjunção
  - Transformação do conectivo $\wedge$ em $\vee$.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(P \wedge Q)$	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	H
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T

Exemplo 2: $H = \neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(P \vee Q)$	$\neg(P \vee Q)$	$(\neg P) \wedge (\neg Q)$	H
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T	T	T

No método da tabela-verdade:

1. Uma fórmula é uma *tautologia* se a última coluna de sua tabela-verdade contém somente valores T;
2. Uma fórmula é uma *contradição* se a última coluna de sua tabela-verdade contém somente valores F;
3. Uma fórmula é *factível* se a última coluna de sua tabela-verdade contém pelo menos um valor T;
4. Duas fórmulas são *equivalentes semanticamente* quando, para cada linha da tabela-verdade, suas colunas apresentam o mesmo valor;
5. Uma fórmula G *implica semanticamente na fórmula* H se, para toda linha cujo valor da coluna de G é verdadeiro, o valor da coluna de H também é verdadeiro.

Exemplo 3: $P_1 \to ((P_2 \wedge P_3) \to ((P_4 \wedge P_5) \to ((P_6 \wedge P_7) \to P_8)))$.

Viável?

Que quantidade de linhas que a tabela terá?

Exercício

Determine se as fórmulas a seguir são tautologias:

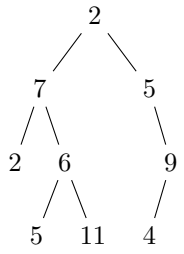
- $(P \to Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P)$
- $(P \to R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$
- $\neg(\neg P \vee \neg Q) \to (P \wedge Q)$

5.2 Método da árvore semântica

Determinação da validade de uma fórmula a partir de uma árvore

Árvore

Estrutura de dados dada por um conjunto de vértices (nós), interligados por arestas



Exemplo: $H = (P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ I[P]=T \diagup & & \diagdown I[P]=F \\ 2 & & 3 \end{array}$$

- Nó 2: $I[P] = T$

$$\begin{array}{l} (P \to Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \to (\neg P)) \\ T \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad T \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (P \to Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \to (\neg P)) \\ T \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad FT \end{array}$$

- De forma análoga, para o nó 3: $I[P] = F$

$$\begin{array}{l} (P \to Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \to (\neg P)) \\ FT \quad\;\; T \qquad\qquad\quad T \quad TF \end{array}$$

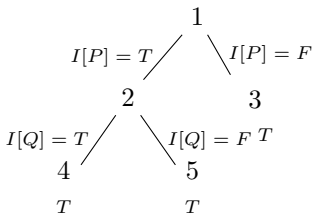
$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ I[P]=T \diagup & & \diagdown I[P]=F \\ & 2 & \qquad 3 \\ I[Q]=T \diagup & & \diagdown I[Q]=FT \\ 4 & & 5 \end{array}$$

- Nó 4: $I[Q] = T$

$$\begin{array}{l} (P \to Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \to (\neg P)) \\ TT \;\; T \;\; T \qquad FT \;\; T \quad FT \end{array}$$

- Nó 5: $I[Q] = F$

$$\begin{array}{l} (P \to Q) \leftrightarrow ((\neg Q) \to (\neg P)) \\ TF \;\; F \;\; T \qquad TF \;\; F \quad FT \end{array}$$



Todas as *folhas* (nós sem filhos) possuem o símbolo T associado.
Logo, H é uma *tautologia*

No método da árvore semântica:

1. Uma fórmula é uma *tautologia* se só têm valores T em seus nós folhas;
2. Uma fórmula é uma *contradição* se só têm valores F em seus nós folhas;
3. Uma fórmula é *factível* se pelo menos um nó folha com valor T;
4. Duas fórmulas G e H são *equivalentes semanticamente*, se a árvore semântica correspondente à fórmula $G \leftrightarrow H$ for uma tautologia;
5. Uma fórmula G *implica semanticamente na fórmula* H, se a árvore semântica correspondente à fórmula $G \rightarrow H$ for uma tautologia.

Exercício
Determine se as fórmulas a seguir são tautologias:

- $(P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P)$
- $(P \leftrightarrow R) \rightarrow (\neg P \vee R) \vee (\neg R \vee P)$
- $X > 10 \rightarrow X^2 = Y \leftrightarrow X^2 \neq Y \wedge X \leq 10$

5.3 Método do absurdo ou negação

- Considera-se inicialmente a negação daquilo que se quer demonstrar.
  - *Exemplo*: Para uma fórmula H a qual se quer demonstrar que é uma tautologia, considera-se que ela não é uma tautologia.
- A partir de um conjunto de deduções, conclui-se um fato contraditório ou absurdo;
- A consideração feita é portanto falsa, logo a afirmação/demonstração é verdadeira.

Exemplo: $H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$

H é uma tautologia?

- Suponha que H não seja uma tautologia. Então, existe I tal que $I[H] = F$.

$$\begin{array}{c} H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R) \\ F \end{array}$$

- Como $I[H] = F$, teremos:
  $I[(P \to Q) \wedge (Q \to R)] = T$ e $I[P \to R] = F$
- Ou seja,

$$\begin{array}{c} H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R) \\ T \qquad\qquad F \quad\; F \end{array}$$

- Com isso, teremos:

$$\begin{array}{c} H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R) \\ T \quad\; T \quad\; T \qquad F \quad\; TF \;\; F \end{array}$$

- Concluindo que $I[P] = T$ e $I[R] = F$:

$$\begin{array}{c} H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R) \\ TT \quad\; T \quad\; T \;\; F \;\; F \quad\; TF \;\; F \end{array}$$

- Neste momento, é possível concluir que $I[Q] = T$ e $I[Q] = F$, ao mesmo tempo,

$$\begin{array}{c} (P \to Q) \text{ e } (Q \to R)\,, \\ TT \qquad\qquad T \;\; F \end{array}$$

- chegando em um absurdo:

$$\begin{array}{c} H = ((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R) \\ TT \;\; T \;\; T \quad FT \;\; F \quad F \quad TF \;\; F \end{array}$$

- Utilizada para demonstração da contradição.
- Útil na aplicação em fórmulas com conectivo $\rightarrow$, $\vee$, negação de $\wedge$.
  - Apenas uma situação possível para a negação.
- Utilizada em diversas aplicações na matemática e computação.
- *Ausência do absurdo*: situações nas quais, supondo a negação da afirmação, não se chega a um absurdo.
  - Foi encontrada uma situação na qual a fórmula pode ser falsa/verdadeira.
  - Conclui-se que a consideração feita é plausível, portanto a propriedade semântica sendo testada não se aplica à fórmula em questão.

Exemplo: $H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q)$

- Duas possibilidades: $T \leftrightarrow F$ e $F \leftrightarrow T$
  - Possibilidade 1: não se encontra um absurdo.
  - Possibilidade 2: não se encontra um absurdo.
- Assim, a fórmula não é uma tautologia, pois existem pelo menos duas interpretações I e J, tais que $I[H] = F$ e $J[H] = F$.

Exemplo: $H = (P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

- Duas possibilidades: $T \leftrightarrow F$ e $F \leftrightarrow T$
  - Possibilidade 1: absurdo é encontrado.
  - Possibilidade 2: não se encontra um absurdo.
- Assim, H também não é tautologia.

No método da negação:

1. Uma fórmula é uma *tautologia* se a suposição $\exists I \mid I[H] = F$[1] gerar um absurdo;
2. Uma fórmula é uma *contradição* se a suposição $\exists I \mid I[H] = T$ gerar um absurdo;
3. Uma fórmula é *contingente* quando ela não for tautologia, nem contradição. Neste caso, basta apresentar duas interpretações para H, I e J, onde $I[H] = T$ e $J[H] = F$;
4. Duas fórmulas G e H são *equivalentes semanticamente*, se for possível provar que a fórmula $G \leftrightarrow H$ é uma tautologia;
5. Uma fórmula G *implica semanticamente na fórmula* H, se for possível provar que a fórmula $G \rightarrow H$ é uma tautologia.

[1] Notação: $\exists$: existe; $|$: tal que.

Exercício

Demonstre, utilizando os três métodos de validação estudados, que as fórmulas a seguir são tautologias:

- $((H \to G) \wedge (G \to H)) \to (H \to H)$
- $(H \wedge (G \vee E)) \leftrightarrow ((H \wedge G) \vee (H \wedge E))$
- $\neg(H \to G) \leftrightarrow (H \wedge (\neg G))$
- $((\neg R \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)) \to (R \to P)$

Referências

1. MARTINS, L. G. A. *Apostila de lógica proposicional*, FACOM, UFU.
2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU

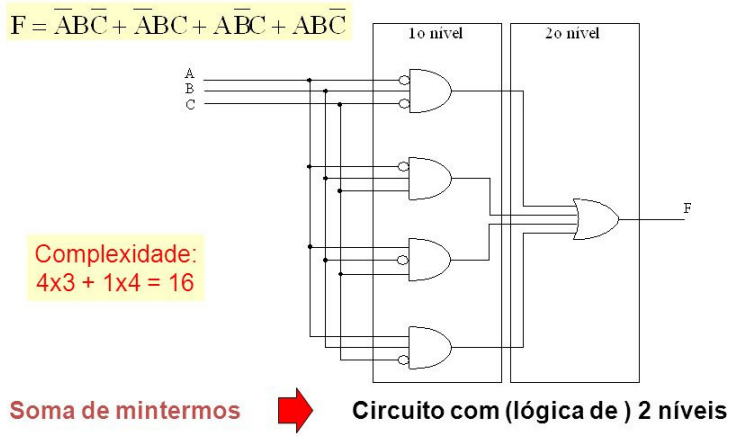
LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU

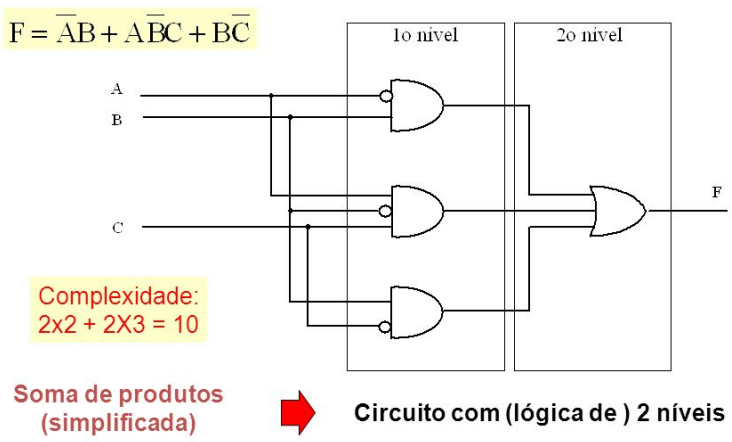
6 Relações semânticas entre os conectivos

6.1 Introdução

- *Objetivo*: estudar as relações de significado entre os conectivos da lógica proposicional
  - Alterações nos conectivos usados em uma fórmula podem gerar outras fórmulas com o mesmo significado
- Conjuntos completos de conectivos
- Diversas aplicações
  - Simplificação do alfabeto da lógica proposicional
  - Redução do conjunto de conectivos
- Simplificação de circuitos eletrônicos

Exemplo: circuitos lógicos





6.2 Conjunto de conectivos completos

Seja Ψ um conjunto de conectivos:

- Ψ é completo se dada uma fórmula H do tipo $\neg P$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \leftrightarrow Q)$, é possível determinar uma outra fórmula G equivalente a H que contém apenas os conectivos de Ψ e os símbolos P e Q em H.
- Tudo que é expresso semanticamente pelos conectivos lógicos será também expresso pelos conectivos do conjunto completo (*regras de trocas*).

Conjunto completo $\{\neg, \vee\}$

- Equivalência entre $\rightarrow$ e $\{\neg, \vee\}$:
- Foi visto que $H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ é uma tautologia.

P	Q	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	H
F	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T

- Equivalência entre $\rightarrow$ e $\{\neg, \vee\}$:
  - Assim, $(P \rightarrow Q)$ e $(\neg P \vee Q)$ são equivalentes.
  - $(P \rightarrow Q)$ pode ser expressa por $(\neg P \vee Q)$, mantendo o significado.
  - O que é expresso semanticamente pelo conectivo $\rightarrow$ pode ser expresso usando os conectivos $\neg$ e $\vee$.

- Equivalência entre $\wedge$ e $\{\neg, \vee\}$:
- Foi visto que $H = (P \wedge Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$ é uma tautologia.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	H
F	F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
T	T	F	F	T	T	T

- Equivalência entre $\wedge$ e $\{\neg, \vee\}$:
  - Assim, $(P \wedge Q)$ e $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ são equivalentes.
  - $(P \wedge Q)$ pode ser expressa por $\neg(\neg P \vee \neg Q)$, mantendo o significado.
  - O que é expresso semanticamente pelo conectivo $\wedge$ pode ser expresso usando os conectivos $\neg$ e $\vee$.

- Equivalência entre $\leftrightarrow$ e $\{\neg, \vee\}$:
- $(P \leftrightarrow Q)$ equivale a $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$.
  - $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$ equivale a $((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P))$
  - $((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P))$ equivale a $\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$
- Como a equivalência entre fórmulas é transitiva:
  $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$

Regra de substituição

- Sejam E_G , E_H, G e H fórmulas da lógica proposicional, tais que:
  - G e H são subfórmulas de E_G e E_H, respectivamente;
  - E_H é obtida de E_G substituindo todas as ocorrências da formula G em E_G por H.
- Se G equivale a H, então E_G equivale a E_H.

Exemplo:

- Dada uma fórmula E, obter uma fórmula G equivalente a E, contendo apenas os conectivos $\{\neg, \vee\}$
- $E = (P \leftrightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)$

Exemplo: $E = (P \leftrightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)$

- $P \leftrightarrow Q$ equivale a $\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$
- Assim, obtemos E_1:
  $E_1 = \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)) \vee (R \rightarrow S)$
- $(R \rightarrow S)$ equivale a $(\neg R \vee S)$;
- Assim, obtemos G:
  $G = \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \vee S)$, equivalente a E.

6.3 O conectivo nand

Considerando o *conectivo* nand, definido por:
$(P \,\mathrm{nand}\, Q) = (\neg(P \wedge Q))$

- O conjunto $\{\mathrm{nand}\}$ é completo.
- Para verificar tal fato, utiliza-se as equivalências
  - $\neg P$ equivale a $(P \,\mathrm{nand}\, P)$
  - $(P \vee Q)$ equivale a $((P \,\mathrm{nand}\, P) \,\mathrm{nand} (Q \,\mathrm{nand}\, Q))$.
- Como o conjunto $\{\neg, \vee\}$ é completo, e as equivalências entre esses conectivos e o conectivo nand existem, então o conjunto $\{\mathrm{nand}\}$ é completo.

Exemplo
Dada uma fórmula H, obter uma fórmula G, equivalente a H, contendo apenas o conectivo nand e os símbolos proposicionais de H.
$H = P \wedge (R \rightarrow S)$

- $P \wedge (R \rightarrow S)$ equivale a $P \wedge (\neg R \vee S)$
- $P \wedge (\neg R \vee S)$ equivale a $P \wedge \neg\neg(\neg R \vee S)$
- $P \wedge \neg\neg(\neg R \vee S)$ equivale a $P \wedge \neg(R \wedge \neg S)$
- $P \wedge \neg(R \wedge \neg S)$ equivale a $P \wedge (R \,\mathrm{nand}\, \neg S)$
- $P \wedge (R \,\mathrm{nand}\, \neg S)$ equivale a $P \wedge (R \,\mathrm{nand} (S \,\mathrm{nand}\, S))$
- $P \wedge (R \,\mathrm{nand} (S \,\mathrm{nand}\, S))$ equivale a $\neg\neg(P \wedge (R \,\mathrm{nand} (S \,\mathrm{nand}\, S)))$
- $\neg\neg(P \wedge (R \,\mathrm{nand} (S \,\mathrm{nand}\, S)))$ equivale a $\neg(P \,\mathrm{nand} (R \,\mathrm{nand} (S \,\mathrm{nand}\, S)))$
- $\neg(P \,\mathrm{nand} (R \,\mathrm{nand} (S \,\mathrm{nand}\, S)))$ equivale a $(P \,\mathrm{nand} (R \,\mathrm{nand} (S \,\mathrm{nand}\, S))) \,\mathrm{nand} (P \,\mathrm{nand} (R \,\mathrm{nand} (S \,\mathrm{nand}\, S)))$

Redefinição do alfabeto

- O alfabeto da lógica proposicional pode ser redefinido, considerando apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$.
- *Importante*: a linguagem da lógica proposicional não é modificada.
- Como true equivale a $\neg$ false, apenas o símbolo false é considerado.

Alfabeto modificado da lógica proposicional:

- Símbolos de pontuação: (;).
- Símbolos de verdade: false.
- Símbolos proposicionais: P; Q; R; S; P_1; Q_1; R_1; S_1; P_2; Q_2; ....
- Conectivos proposicionais: $\neg$; $\vee$.

Este alfabeto pode ser redefinido de outras formas.

Exercícios

Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras, justificando:

- $(\neg P)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\vee$ e P
  - *não é possível*
- $(P \vee Q)$ pode ser expressa equivalentemente usando apenas o conectivo $\rightarrow$, P e Q
  - *é possível*: $(P \rightarrow Q) \rightarrow Q$
- Demonstre a validade das equivalências a seguir:
  - $\neg P \Leftrightarrow (P \,\text{nand}\, P)$
  - $(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \,\text{nand}\, \neg Q)$

6.4 Formas normais

Fórmulas da lógica proposicional podem ser expressas utilizando fórmulas com estruturas predefinidas. Tais estruturas são denominadas *formas normais*.

1. *Forma normal disjuntiva (fnd)*: disjunção de conjunção de literais.
2. *Forma normal conjuntiva (fnc)*: conjunção de disjunção de literais.

Literal

Símbolo proposicional ou sua negação.

Exemplos:

- Forma normal disjuntiva
  $H = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg R \wedge \neg Q \wedge P) \vee (P \wedge S)$
- Forma normal conjuntiva
  $G = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee \neg Q \vee P) \wedge (P \vee S)$

Obtenção da fnc e da fnd

Exemplo: $H = (P \rightarrow Q) \wedge R$

1. Obtenção da tabela-verdade:

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge R$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	T	T
F	F	F	T	F

2. Extração das linhas que interpretam H como T (*fnd*):

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge R$
T	T	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

3. Montagem das conjunções a partir das linhas extraídas (*fnd*):

   (a) $\{I[P] = T,\ I[Q] = T,\ I[R] = T\}$:
   $P \wedge Q \wedge R$

   (b) $\{I[P] = F,\ I[Q] = T,\ I[R] = T\}$:
   $\neg P \wedge Q \wedge R$

   (c) $\{I[P] = F,\ I[Q] = F,\ I[R] = T\}$:
   $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$

4. Obtenção da *fnd*:

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

2. Extração das linhas que interpretam H como F (*fnc*):

P	Q	R	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge R$
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	F	T	F
F	F	F	T	F

3. Montagem das disjunções a partir das linhas extraídas (*fnc*):

   (a) $\{I[P] = T,\ I[Q] = T,\ I[R] = F\}$:
   $\neg P \vee \neg Q \vee R$

   (b) $\{I[P] = T,\ I[Q] = F,\ I[R] = T\}$:
   $\neg P \vee Q \vee \neg R$

   (c) $\{I[P] = T,\ I[Q] = F,\ I[R] = F\}$:
   $\neg P \vee Q \vee R$

   (d) $\{I[P] = F,\ I[Q] = T,\ I[R] = F\}$:
   $P \vee \neg Q \vee R$

   (e) $\{I[P] = F,\ I[Q] = F,\ I[R] = F\}$:
   $P \vee Q \vee R$

4. Obtenção da *fnc*:

$$(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$$

Exercícios

1. Obtenha a fnd e fnc de $\neg(P \wedge Q) \to R$
2. Dada a fórmula $H = ((P \to Q) \wedge (\neg Q \leftrightarrow R)) \leftrightarrow (\neg R \wedge \neg P)$:
   (a) Construa a fórmula equivalente utilizando apenas os conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$.
   (b) Gere as fórmulas equivalentes na fnd e fnc.

Referências

1. PAIVA, J. G. S. Lógica para Computação. Introdução – notas de aula.
2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.
3. MARTINS, L. G. A, Apostila de Lógica Proposicional, FACOM, UFU.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU

7 Sistema axiomático

7.1 Introdução

- *Lógica*: estudo das estruturas para *representação* e *dedução* do conhecimento
- *Dedução*: construção de conhecimento
  - Produção de um argumento, utilizando argumentos previamente fornecidos
- Aplicações na vida real e na Computação
  - Construção do aprendizado
  - Implementação de programas

Sistemas de dedução

- Estabelecem estruturas que permitem a representação e dedução do conhecimento
- Três sistemas:
  1. Sistema axiomático
  2. *Tableaux* semânticos
  3. Resolução

Dedução de teoremas

- Processo de *prova por dedução*: Demonstração de que, dadas algumas expressões como verdadeiras (hipóteses ou premissas), uma nova sentença também é verdadeira.
  - A sentença provada é um *teorema* com respeito às hipóteses.
- Derivação da expressão desejada H a partir do conjunto de hipóteses β, utilizando os recursos disponíveis em algum dos sistemas de dedução válidos.

Conceitos

- *Hipóteses* (ou *premissas*): Fórmulas proposicionais que se supõe serem *verdadeiras*.
- *Axiomas*: conhecimentos dados *a priori*.
  - No caso do sistema axiomático, representado por *tautologias*.

- *Regras de inferência*: implicações semânticas utilizadas para fazer inferências:
  - Execução dos "passos" de uma demonstração ou dedução;
  - Maneira de construção do conhecimento, combinando hipóteses e axiomas.

7.2 Sistema axiomático

- Estrutura baseada em axiomas.
- Composição:
  - Alfabeto da lógica proposicional
  - Conjunto das fórmulas da lógica proposicional (*hipóteses*)
  - Subconjunto de fórmulas, denominados *axiomas*.
  - Conjunto de *regras de inferência*.

- Objetivos:
  - Estudo formal da representação e dedução de argumentos.
  - Novo conhecimento a partir do conhecimento dado *a priori* $\Rightarrow$ axiomas + hipóteses.

Axiomas

- Fórmulas axiomáticas podem variar entre os sistemas axiomáticos.
- Esquemas de fórmulas:
  - $\text{Ax}_1 = \neg(H \vee H) \vee H$
  - $\text{Ax}_2 = \neg H \vee (G \vee H)$
  - $\text{Ax}_3 = \neg(\neg H \vee G) \vee (\neg(E \vee H) \vee (G \vee E))$
- Outros conectivos podem ser utilizados:
  - $\text{Ax}_1 = (H \vee H) \rightarrow H$
  - $\text{Ax}_2 = H \rightarrow (G \vee H)$
  - $\text{Ax}_3 = (H \rightarrow G) \rightarrow ((E \vee H) \rightarrow (E \vee G))$
- Infinitas fórmulas.

Mecanismos de inferência

- Pode variar entre sistemas axiomáticos
- *Mais comum*: esquema de regras de inferência chamado *modus ponens*
- *modus ponens*:
  - Dadas as fórmulas H e G, Tendo H e $(H \rightarrow G)$, deduza G

Notação

$$MP = \frac{H, (H \rightarrow G)}{G}$$

Modus ponens

- $H, (H \rightarrow G)$: *antecedente*.
- G: *consequente*.
- Exemplo:
  - H: "Está chovendo".
  - G: "A rua está molhada".
- *Modus ponens* define um procedimento sintático de dedução do conhecimento.
  - Usado em linguagens de programação como *PROLOG*.

Consequência lógica

- Regras de inferência: mecanismo de inferência aplicado aos axiomas e hipóteses.
- Argumentos obtidos na dedução:
  - consequências lógicas;
  - conhecimento provado.

- Sejam H uma fórmula e β um conjunto de fórmulas denominadas por *hipóteses*.
- Uma prova sintática de H a partir de β, num sistema axiomático P_a, é uma sequência de fórmulas H_1, H_2, ..., H_n, onde
  - $H = H_n$
  - Para todo i tal que $1 \leq i \leq n$,
    - H_i é um axioma ou
    - $H_i \in \beta$ ou
    - H_i é deduzida de H_j e H_k, utilizando a regra *modus ponens*, onde $1 \leq j < i$ e $1 \leq k < i$:

$$MP = \frac{H_j, H_k}{H_i}, \text{ onde } H_k = H_j \rightarrow H_i$$

Exemplo

- Conjunto de hipóteses $\beta = \{G_1, \ldots, G_9\}$
  - $G_1 = (P \wedge R) \rightarrow P$
  - $G_2 = Q \rightarrow P_4$
  - $G_3 = P_1 \rightarrow Q$
  - $G_4 = (P_1 \wedge P_2) \rightarrow Q$
  - $G_5 = (P_3 \wedge R) \rightarrow R$
  - $G_6 = P_4 \rightarrow P$
  - $G_7 = P_1$
  - $G_8 = P_3 \rightarrow P$
  - $G_9 = P_2$
- Podemos provar $(S \vee P)$?

Sequência de fórmulas H_1, ..., H_9, prova de $(S \vee P)$, a partir de β:

- $H_1 = G_7 = P_1$
- $H_2 = G_3 = P1 \rightarrow Q$
- $H_3 = Q$ (resultado de *modus ponens* em H_1 e H_2)
- $H_4 = G_2 = Q \rightarrow P_4$
- $H_5 = P_4$ (resultado de *modus ponens* em H_3 e H_4)

- $H_6 = G_6 = P_4 \rightarrow P$
- $H_7 = P$ (resultado de *modus ponens* em H_5 e H_6)
- $H_8 = \text{Ax}_2 = P \rightarrow (S \vee P)$
- $H_9 = (S \vee P)$ (resultado de *modus ponens* em H_7 e H_8)

Dada uma fórmula H e um conjunto β:

- Se H tem uma prova a partir de $\beta \Rightarrow$ conhecimento representado por H é deduzido a partir do conhecimento representado pelos axiomas e pelas fórmulas de β.
- Nesse caso, H é uma *consequência lógica* de β.
  - Notação: $\beta \vdash H$.
- H é um *teorema* no sistema axiomático se existe uma prova de H, nesse sistema, que utiliza apenas os axiomas.
  - Conjunto de hipóteses vazio.
  - Notação: $\vdash H$.

Outros mecanismos de inferência

- As regras de inferência são *implicações semânticas*. Elas são utilizadas para fazer inferências, ou seja, executar os "passos" de uma demonstração ou dedução.
- Assim como os axiomas, o conjunto de regras de inferência adotado em um sistema axiomático pode variar, desde que mantenham as propriedades de completude e correção.
- Quanto menor o conjunto de regras de inferência, mais *elegante* é o sistema axiomático.
- A maioria dos sistemas axiomáticos costuma utilizar apenas o *modus ponens* (MP) como regra de inferência. Porém, há outros mecanismos:

Adição disjuntiva	$P \vDash P \vee Q$ ou $Q \vDash P \vee Q$
Simplif. conjuntiva	$P \wedge Q \vDash P$ ou $P \wedge Q \vDash Q$
Conjunção	$P, Q \vDash P \wedge Q$
Simplif. disjuntiva	$(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \vDash P$
Modus ponens	$(P \to Q) \wedge P \vDash Q$
Modus tollens	$(P \to Q) \wedge \neg Q \vDash \neg P$
Silogismo disj.	$(P \vee Q) \wedge \neg Q \vDash P$
Silogismo hip.	$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \vDash P \to R$
Dilema construt.	$(P \to Q) \wedge (R \to S) \wedge (P \vee R) \vDash Q \vee S$
Dilema construt. 2	$(P \to Q) \wedge (R \to S) \vDash (P \vee R) \to (Q \vee S)$
Dilema destrut.	$(P \to Q) \wedge (R \to S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \vDash \neg P \vee \neg R$
Dilema destrut. 2	$(P \to Q) \wedge (R \to S) \vDash (\neg Q \vee \neg S) \to (\neg P \vee \neg R)$
Absorção	$P \to Q \vDash P \to (P \to Q)$ ou $P \to Q \vDash P \to (P \wedge Q)$

7.3 Exercícios

1. Verifique a validade dos argumentos, utilizando regras de inferência

   (a) $R \to (P \vee Q)$, R, $\neg P \vdash Q$
   (b) $P \to Q$, $\neg Q$, $\neg P \to R \vdash R$
   (c) $P \to Q$, $\neg Q$, $P \vee R \vdash R$
   (d) $P \vee Q$, $P \to R$, $\neg R \vdash Q \vee S$
   (e) $P \to (Q \to R)$, $P \to Q$, $P \vdash R$
   (f) P, $P \to \neg Q$, $\neg Q \to \neg S \vdash \neg S$
   (g) $P \to Q$, $Q \to R$, $\neg R$, $\neg P \to S \vdash S$
   (h) P, $P \vee Q$, $(P \vee Q) \to R \vdash R \vee S$
   (i) $P \to (Q \vee R)$, $Q \to S$, $R \to P_1 \vdash P \to (S \vee P1)$

2. Verifique a validade dos argumentos abaixo, utilizando regras de inferência

   - "Está nublado agora. Portanto, ou está nublado ou está chovendo agora."
   - "Está nublado e chovendo agora. Portanto, está nublado agora."
   - "Se chover hoje, então hoje nós não teremos churrasco. Se não tivermos churrasco hoje, então teremos churrasco amanhã. Portanto, se chover hoje, então nós teremos churrasco amanhã."

3. Mostre que as hipóteses "Não está fazendo sol esta tarde e está mais frio do que ontem", "Nós iremos nadar somente se fizer sol esta tarde", "Se nós não formos nadar, então nós vamos velejar", e "Se nós formos velejar, então estaremos em casa no final da tarde." levam à conclusão: "Nós estaremos em casa no final da tarde."

Referências

1. PAIVA, J. G. S. Lógica para Computação. Introdução – notas de aula.
2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.
3. MARTINS, L. G. A, Apostila de Lógica Proposicional, FACOM, UFU.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU

LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU

8 *Tableaux* semânticos

8.1 Introdução

Sistemas de dedução

- Estabelecem estruturas que permitem a representação e dedução do conhecimento
- Três sistemas:
  1. Sistema axiomático
  2. *Tableaux* semânticos
  3. Resolução

Motivação

- *Sistema axiomático*: inadequado à implementação em computadores;
- Não se conhece uma implementação que realize a mecanização do sistema axiomático P_a de forma adequada;
- Duas alternativas apropriadas para implementação: *tableaux* e resolução.

Limitações do sistema axiomático

1. Método permite apenas demonstrar se $\beta \vdash H$: não se pode demonstrar se $\beta \nvdash H$.
2. No P_a, se é dado que $\beta \nvdash H$, não se pode concluir $\beta \vdash \neg H$.

***Tableaux* semânticos**

A partir de fórmula H:

- $\beta \vdash H$?
- $\beta \nvdash H$?

A partir dos *tableaux semânticos*, é possível verificar qual das duas situações de fato ocorre.

8.2 O sistema de *tableaux* semânticos Tb_a

***Tableau* semântico**
Sequência de fórmulas obtida de acordo com conjunto de regras e apresentada sob forma de árvore.

- Elementos básicos:
  1. Alfabeto da lógica proposicional – *sem* símbolos false e true;
  2. Conjunto de fórmulas da lógica proposicional
  3. Conjunto de *regras de dedução*

Regras de inferência $R_1, \ldots, R_9$
Dadas duas fórmulas quaisquer A e B da lógica proposicional:

$$R_1 = A \wedge B \qquad \begin{array}{c} A \\ B \end{array}$$

$$R_2 = A \vee B \qquad \begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ A & B \end{array}$$

$$R_3 = A \rightarrow B \qquad \begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \neg A & B \end{array}$$

$$R_4 = A \leftrightarrow B \qquad \begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ A \wedge B & \neg A \wedge \neg B \end{array}$$

$$R_5 = \neg\neg A \qquad A$$

$$R_6 = \neg(A \wedge B) \qquad \begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \neg A & \neg B \end{array}$$

$$R_7 = \neg(A \vee B) \qquad \begin{array}{c} \neg A \\ \neg B \end{array}$$

$$R_8 = \neg(A \rightarrow B) \qquad \begin{array}{c} A \\ \neg B \end{array}$$

$$R_9 = \neg(A \leftrightarrow B) \qquad \begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \neg A \wedge B & A \wedge \neg B \end{array}$$

Exemplo

$$\{(A \vee B), (A \wedge \neg B)\}$$

1.	$A \vee B$	
2.	$A \wedge \neg B$	
	$\swarrow \quad \searrow$	
3.	$A \quad B$	R_2 1.
4.	$A \quad A$	R_1 2.
5.	$\neg B \quad \neg B$	R_1 2.

Outra forma (*adiando ramificação*):

$$\{(A \vee B), (A \wedge \neg B)\}$$

1.	$A \vee B$	
2.	$A \wedge \neg B$	
3.	A	R_1 2.
4.	$\neg B$	R_1 2.
	$\swarrow \quad \searrow$	
5.	$A \quad B$	R_2 1.

Heurística de aplicação de regras

- Aplique preferencialmente regras:
  R_1, R_5, R_7 e R_8.
- Tais regras não bifurcam o *tableau*.

Construção do *tableau* semântico

Dado um conjunto de fórmulas

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

- A *árvore* tab_1 a seguir corresponde ao *tableau* iniciado com A_1, ..., A_n:

1.	A_1
2.	A_2
$\vdots$	$\vdots$
n.	A_n

  Nota: As fórmulas A_1, ..., A_n podem ser escritas em qualquer ordem.

- tab_2: árvore resultante da aplicação de uma das regras $R_1, \ldots, R_9$ a tab_1.
  - tab_2 também é *tableau* iniciado com $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

$\vdots$

- tab_i, $i \geq 2$: *tableau* iniciado com $\{A_1, \ldots, A_n\}$
- tab_{i+1}: árvore resultante da aplicação de uma das regras $R_1, \ldots, R_9$ a tab_i.
  - tab_{i+1} também é *tableau* iniciado com $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Ex.: construção de *tableau* semântico

$$\{(A \to B), \neg(A \vee B), \neg(C \to A)\}$$

tab_1:

1.	$A \to B$	
2.	$\neg(A \vee B)$	
3.	$\neg(C \to A)$	

tab_2 – aplicação de R_7 a tab_1:

1.	$A \to B$	
2.	$\neg(A \vee B)$	
3.	$\neg(C \to A)$	
4.	$\neg A$	$R_7, 2.$
5.	$\neg B$	$R_7, 2.$

tab_3 – aplicação de R_3 a tab_2:

1.	$A \to B$	
2.	$\neg(A \vee B)$	
3.	$\neg(C \to A)$	
4.	$\neg A$	$R_7, 2.$
5.	$\neg B$	$R_7, 2.$
	$\swarrow \quad \searrow$	
6.	$\neg A \qquad B$	$R_3, 1.$

tab_4 – aplicação de R_8 a tab_3:

1.	$A \to B$	
2.	$\neg(A \vee B)$	
3.	$\neg(C \to A)$	
4.	$\neg A$	$R_7, 2.$
5.	$\neg B$	$R_7, 2.$
	$\swarrow \quad \searrow$	
6.	$\neg A \qquad B$	$R_3, 1.$
7.	$C \qquad C$	$R_8, 3.$
8.	$\neg A \qquad \neg A$	$R_8, 3.$

Ramo à direita: contém $\neg B$ e B.

Definições

Ramo
Sequência $H_1, \ldots, H_n$, onde H_1: primeira fórmula do *tableau*, e H_{i+1} é derivada de H_i, $1 \leq i < n$, através de alguma regra de Tb_a.

- *Ramo fechado*: se contém A e $\neg A$, onde A é uma fórmula da lógica proposicional.
- *Ramo saturado*: para toda fórmula A do ramo:
  - Já se aplicou regra de Tb_a em A (A for expandida por alguma regra); ou
  - Não é possível aplicar regra alguma em A (A é um *literal*).
- *Ramo aberto*: Ramo saturado, mas não fechado.
- *Tableau fechado*: quando todos os seus ramos são fechados;
- *Tableau aberto*: quando contém ao menos um ramo aberto.

Exemplo: $\{(A \wedge B) \rightarrow C, (A \wedge B) \wedge \neg C\}$

1.	$(A \wedge B) \rightarrow C$	
2.	$(A \wedge B) \wedge \neg C$	
3.	$(A \wedge B)$	$R_1, 2.$
4.	$\neg C$	$R_1, 2.$
	$\swarrow \quad \searrow$	
5.	$\neg(A \wedge B)$ fechado $\quad C$ fechado	$R_3, 1.$

O *tableau* é fechado – seus 2 ramos são fechados.

8.3 Consequência lógica no sistema de *tableaux* semânticos Tb_a

Seja H uma fórmula:

- Uma *prova* de H no Tb_a é um *tableau fechado* iniciado com $\neg H$.
  - Neste caso, H é um *teorema* do sistema Tb_a.

Exemplo: $H = \neg(((P \to Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P)$

O *tableau* é iniciado com $\neg H$:

1.	$\neg\neg(((P \to Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P)$	$\neg H$
2.	$((P \to Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)) \wedge \neg\neg P$	$R_5, 1.$
3.	$(P \to Q) \wedge \neg(P \leftrightarrow Q)$	$R_1, 2.$
4.	$\neg\neg P$	$R_1, 2.$
5.	$(P \to Q)$	$R_1, 3.$
6.	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	$R_1, 3.$
7.	P	$R_5, 4.$
	$\swarrow \quad \searrow$	
8.	$\neg P \qquad Q$	$R_1, 5.$
	fechado $\quad \swarrow \searrow$	
9.	$(\neg P \wedge Q) \; (P \wedge \neg Q)$	$R_9, 6.$
10.	$\neg P \qquad P$	$R_1, 9.$
11.	$Q \qquad \neg Q$	$R_1, 9.$
	fechado $\quad$ *fechado*	

O presente *tableau* – *fechado* – é uma prova de H.
Notação: $\vdash H$

- $\vdash H$ denota uma prova em Tb_a.

Exemplo 2: $G = ((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P)$

1.	$\neg((P \leftrightarrow Q) \vee \neg P)$	$\neg G$
2.	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	$R_7, 1.$
3.	$\neg\neg P$	$R_7, 1.$
4.	P	$R_5, 3.$
	$\swarrow \quad \searrow$	
5.	$P \wedge \neg Q \qquad \neg P \wedge Q$	$R_9, 2.$
6.	$P \qquad \neg P$	$R_1, 5.$
7.	$\neg Q \qquad Q$	$R_1, 5.$
	aberto $\quad$ *fechado*	

G não é tautologia, e o *tableau* não constitui prova de G.

Completude e correção

Seja H uma fórmula da lógica proposicional:

Teorema da completude

Se H é uma *tautologia*, então existe uma prova de H por *tableaux*.

(Se $\vDash H$, então $\vdash H$), onde $\vdash H$ denota uma prova no sistema Tb_a.

Teorema da correção
Se existe uma prova de H no sistema Tb_a, então H é uma tautologia.
(Se $\vdash H$, então $\vDash H$).

Consequência lógica de conjunto de hipóteses
Dada uma fórmula H, e um conjunto de hipóteses,
$\beta = \{A_1, \ldots, A_n\}$
Então H é uma *consequência lógica de* β, por *tableaux* semânticos, se existe uma prova de $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow H$ no sistema Tb_a.
Notações:
$\beta \vdash H$
$\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash H$

Algoritmo da prova por *tableaux* semânticos
Processo para se provar uma fórmula G, dado $\beta = \{A_1, \ldots, A_n\}$:

1. Produzir fórmula $H = (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow G$
2. Negar H: $\neg H$
3. Obter o *tableau* semântico a partir de $\neg H$, aplicando-se as regras $R_1, \ldots, R_9$
4. Caso o *tableau* seja fechado (i.e., todos os seus ramos são fechados), a prova foi concluída.

Exemplo 1
Considerando que

- Guga é determinado.
- Guga é inteligente.
- Se Guga é determinado e atleta, ele não é um perdedor.
- Se Guga é um amante do tênis, então é um atleta.
- Se Guga é inteligente, então é um amante do tênis.

Verificar se a afirmação "Guga não é um perdedor" é uma consequência lógica dos argumentos acima.

- Guga é determinado:
  P
- Guga é inteligente:
  Q

- Se Guga é determinado e atleta, ele não é um perdedor:
  $(P \wedge R) \rightarrow \neg P_1$
- Se Guga é um amante do tênis, então é um atleta:
  $Q_1 \rightarrow R$
- Se Guga é inteligente, então é um amante do tênis:
  $Q \rightarrow Q_1$

- Logo, $H = (P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \to \neg P_1) \wedge (Q_1 \to R) \wedge (Q \to Q_1)) \to \neg P_1$

1.	$\neg((P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \to \neg P_1) \wedge (Q_1 \to R) \wedge (Q \to Q_1)) \to \neg P_1)$	$\neg H$
2.	$P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \to \neg P_1) \wedge (Q_1 \to R) \wedge (Q \to Q_1)$	$R_8, 1.$
3.	$\neg\neg P_1$	$R_8, 1.$
4.	P	$R_1, 2.$
5.	Q	$R_1, 2.$
6.	$(P \wedge R) \to \neg P_1$	$R_1, 2.$
7.	$(Q_1 \to R)$	$R_1, 2.$
8.	$(Q \to Q_1)$	$R_1, 2.$
9.	P_1	$R_5, 3.$
	$\swarrow \quad \searrow$	
10.	$\neg Q \qquad Q_1$	$R_3, 8.$
	fechado $\quad \swarrow \quad \searrow$	
11.	$\neg Q_1 \qquad R$	$R_3, 7.$
	fechado $\swarrow \quad \searrow$	
12.	$\neg(P \wedge R) \qquad \neg P_1$	$R_3, 6.$
	$\swarrow \quad \searrow \qquad$ *fechado*	
13.	$\neg P \qquad \neg R$	$R_6, 12.$
	fechado *fechado*	

- Como o *tableau* é *fechado*, pelo teorema da correção, H é tautologia.
- Logo, "Guga não é um perdedor" é uma consequência das afirmações anteriores.

Exemplo 2

- Considere os argumentos:
  - Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece se o ingresso é barato.
  - Se Guga joga uma partida de tênis, o ingresso é barato.
- Verifique se a afirmação "Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece" é uma consequência lógica dos argumentos acima.
- Guga joga uma partida de tênis:

  P
- A torcida comparece:

  Q

- O ingresso é barato:

  R

$$G = ((P \to (R \to Q)) \wedge (P \to R)) \to (P \to Q)$$

1.	$\neg(((P \to (R \to Q)) \wedge (P \to R)) \to (P \to Q))$	$\neg G$
2.	$(P \to (R \to Q)) \wedge (P \to R)$	$R_8, 1.$
3.	$\neg(P \to Q)$	$R_8, 1.$
4.	P	$R_8, 3.$
5.	$\neg Q$	$R_8, 3.$
6.	$P \to (R \to Q)$	$R_1, 2.$
7.	$P \to R$	$R_1, 2.$
	$\swarrow \quad \searrow$	
8.	$\neg P \qquad R \to Q$	$R_3, 6.$
	fechado $\quad \swarrow \quad \searrow$	
9.	$\neg P \qquad R$	$R_3, 7.$
	fechado $\swarrow \quad \searrow$	
10.	$\neg R \qquad Q$	$R_3, 8.$
	fechado $\quad$ *fechado*	

- Como o *tableau* é *fechado*, pelo teorema da correção, G é tautologia.
- Logo, "Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece" é uma consequência das afirmações anteriores.

Conjunto insatisfazível

Um conjunto β, por exemplo, dado por:

$$\beta = \{\neg P \vee Q, \neg(Q \vee \neg R), R \to P_1, \neg(\neg P \vee P_1)\}$$

é *insatisfazível* ou *não-satisfazível*.

Basta verificar que a fórmula

$H = \neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg(Q \vee \neg R) \wedge (R \to P_1) \wedge \neg(\neg P \vee P_1))$

é uma tautologia (exercício). *Dica:* resolva o tableau iniciado com $\neg H$, que nada mais é do que a conjunção entre as fórmulas do conjunto.

8.4 Exercícios

1. Faça as seguintes demonstrações utilizando *tableaux* semânticos:
   (a) $P \to P$
   (b) $\neg(P \to Q) \leftrightarrow (P \wedge (\neg Q))$
   (c) $(P \vee (P \wedge \neg P)) \leftrightarrow P$

2. Demonstre os seguintes teoremas usando *tableaux* semânticos:
   (a) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
   (b) $((A \to (A \to B)) \wedge A) \to B$
   (c) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
   (d) $((A \to B) \wedge \neg B) \to \neg A$
   (e) $((A \vee B) \vee C) \to (A \vee (B \vee C))$
   (f) $(P \to Q) \to ((\neg P \to Q) \to Q)$
   (g) O funcionário é demitido se o chefe o indica ou os colegas o escolhem. Se o funcionário é demitido e chora, então ele conquista os clientes. Se o funcionário conquista os clientes, ele não vai embora. O chefe indicou um funcionário e ele foi embora. Logo, o funcionário não chorou.
   (h) Se o programa é bom ou passa no horário nobre, o público assiste. Se o público assiste e gosta, então a audiência é alta. Se a audiência é alta, a propaganda é cara. O programa passa no horário nobre, mas a propaganda é barata. Logo, o público não gosta do programa.
   (i) Se Joana sente dor estômago, ela fica irritada. Se Joana toma remédio para dor de cabeça, ela sente dor de estômago. Joana não está irritada. Logo, ela não tomou remédio para dor de cabeça.

Referências

1. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.

2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação e Áreas Afins*, Elsevier, 3a. edição, 2015.

9 Resolução

9.1 Introdução

Sistemas de dedução

- Estabelecem estruturas que permitem a representação e dedução do conhecimento
- Três sistemas:
  1. Sistema axiomático
  2. *Tableaux* semânticos
  3. Resolução

9.2 Resolução na lógica proposicional

- Sistema de *resolução*: método de prova criado por John Alan Robinson (1965);
- Inúmeras pesquisas e implementações utilizam tal método.
  - Programação lógica.

Notação da resolução

Forma de *conjuntos*: considere a fórmula H:

$$H = (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee P)$$

- *Conjunção de disjunções* (fnc)
- Representação na forma de conjuntos:

$$H = \{\{P, \neg Q, R\},\ \{P, \neg Q\},\ \{P\}\}$$

- *Cláusula* : disjunção de literais (conjunto finito de literais)
- *Literais Complementares* : ocorre quando um literal é a negação do outro

Resolvente

- Considere duas cláusulas
  $C_1 = \{A_1, \ldots, A_n\}$
  $C_2 = \{B_1, \ldots, B_n\}$
- Considere que ambas possuem literais complementares entre si
- Considere um literal λ em C_1, tal que o seu complementar $\neg\lambda$ esteja em C_2
- O *resolvente* de C_1 e C_2, chamado $\text{Res}(C_1, C_2)$, é definido por

$$\text{Res}(C_1, C_2) = (C_1 - \{\lambda\}) \cup (C_2 - \{\neg\lambda\})$$

- Se $\text{Res}(C_1, C_2) = \{\}$, tem-se um *resolvente vazio.*

Exemplo 1
Considere:

- $C_1 = \{P, \neg Q, R\}$
- $C_2 = \{\neg P, R\}$
- $\text{Res}(C_1,\, C_2) = \{\neg Q,\, R\}$

Exemplo 2
Considere:

- $C_1 = \{P\}$
- $C_2 = \{\neg P\}$
- $\text{Res}(C_1,\, C_2) = \{\}$

Exemplo 2
Considere:

- $C_1 = \{P, \neg Q\}$
- $C_2 = \{\neg P, Q\}$
- $\text{Res}(C_1, C_2) = \{\neg Q, Q\}$ ou $\{P, \neg P\}$
- *A regra resolvente elimina apenas um literal por vez!*

Elementos básicos

Resolução – Composição dos seguintes elementos:

- Alfabeto da lógica proposicional;
- Conjunto de cláusulas da lógica proposicional;
- Regra de resolução (resolvente).

Resolução define uma estrutura para representação e dedução de conhecimento

- Não existem axiomas;
- Apenas uma regra de inferência (regra de resolução);
- Prova de argumentos usando o conhecimento representado no sistema.

Regra de resolução

- Dadas duas cláusulas
  $C_1 = \{A_1, \ldots, A_n\}$
  $C_2 = \{B_1, \ldots, B_n\}$
- A regra de resolução aplicada a C_1 e C_2 é definida por:
  - Tendo C_1 e C_2, deduza $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$
- Prova da satisfazibilidade de um conjunto de cláusulas $\Rightarrow$ aplicação repetida da regra de resolução até obter uma cláusula vazia.
  - Expansão por resolução.

Exemplo

Considere $\{\{\neg P, Q, R\}, \{P, R\}, \{P, \neg R\}\}$

- Expansão:
  1. $\{\neg P, Q, R\}$
  2. $\{P, R\}$
  3. $\{P, \neg R\}$
  4. $\{Q, R\}$ [$\mathrm{Res}(1, 2)$]
  5. $\{Q, P\}$ [$\mathrm{Res}(3, 4)$]
  6. $\{P\}$ [$\mathrm{Res}(2, 3)$]
- Nesse caso, não é possível obter a cláusula vazia.

Expansão por resolução

- Seja um conjunto de cláusulas $\{A_1, \ldots, A_n\}$
- Seja exp uma expansão por resolução de $\{A_1, \ldots, A_n\}$:

  1. A_1
  2. A_2

  $\vdots$

  n. A_n
- *Obs.*: Nessa expansão, as fórmulas $\{A_1, \ldots, A_n\}$ podem ser escritas em qualquer ordem
- Se $\exp^*$ é a estrutura resultante da adição de $\text{Res}(A_i,\ A_j)$, $(i, j) \leq n, i \neq j$, à expansão exp, então $\exp^*$ também é uma expansão por resolução sobre $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Exemplo

Considere $\{\{\neg P, Q\}, \{P, R\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg Q, \neg R\}\}$

- Expansão:

  1. $\{\neg P, Q\}$
  2. $\{P, R\}$
  3. $\{P, \neg Q\}$
  4. $\{\neg Q, \neg R\}$
  5. $\{Q, R\}$ [Res(1, 2)]
  6. $\{P, R\}$ [Res(3, 5)]
  7. $\{Q, R\}$ [Res(1, 6)]
  8. $\{R, \neg R\}$ [Res(4, 7)]
- Tal resolução também não contém a cláusula vazia.
- Se expansão contém cláusula vazia: *expansão fechada*.

9.3 Consequência lógica no sistema de resolução Rs_a

- Forma clausal de H: toda fórmula da lógica proposicional possui uma forma clausal associada (a partir de sua fnc)
  - Fórmula H_c: conjunção de cláusulas equivalente a H.
- Prova por Resolução:
  - Seja H uma fórmula e $\neg H_c$ a forma clausal associada a $\neg H$;
  - Uma prova de H por resolução é uma expansão fechada sobre $\neg H_c$;
  - Nesse caso H é um *teorema* do sistema de resolução.

Exemplo: prova por resolução

$$H = ((P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \to P_4) \wedge (P_2 \to P_4) \wedge (P_3 \to P_4)) \to P_4$$

- $\neg H = \neg(((P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \to P_4) \wedge (P_2 \to P_4) \wedge (P_3 \to P_4)) \to P_4)$
- $\neg H = \neg(\neg((P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (\neg P_1 \vee P_4) \wedge (\neg P_2 \vee P_4) \wedge (\neg P_3 \vee P_4)) \vee P_4)$
- $\neg H = ((P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (\neg P_1 \vee P_4) \wedge (\neg P_2 \vee P_4) \wedge (\neg P_3 \vee P_4)) \wedge \neg P_4$
- $\neg H = (P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (\neg P_1 \vee P_4) \wedge (\neg P_2 \vee P_4) \wedge (\neg P_3 \vee P_4) \wedge \neg P_4$
- Logo, $\neg H_c = \{\{P_1, P_2, P_3\}, \{\neg P_1, P_4\}, \{\neg P_2, P_4\}, \{\neg P_3, P_4\}, \{\neg P_4\}\}$.
- Expansão por resolução:
  1. $\{P_1, P_2, P_3\}$
  2. $\{\neg P_1, P_4\}$
  3. $\{\neg P_2, P_4\}$
  4. $\{\neg P_3, P_4\}$
  5. $\{\neg P_4\}$
  6. $\{P_2, P_3, P_4\}$ *[Res(1, 2)]*
  7. $\{P_3, P_4\}$ *[Res(3, 6)]*
  8. $\{P_4\}$ *[Res(4, 7)]*
  9. $\{\}$ *[Res(5, 8)]*
- Cláusula vazia: *expansão fechada* $\Rightarrow \vdash H$

Exercício

$$G = ((P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \to P_4) \wedge (P_2 \to P_4) \wedge (P_3 \to P_4)) \to P_3$$

Completude e correção

Seja H uma fórmula da lógica proposicional:

Teorema da completude

Se H é uma *tautologia*, então existe uma prova de H por resolução.

Teorema da correção

Se existe uma prova de H por resolução, então H é uma tautologia.

Consequência lógica de conjunto de hipóteses

Dada uma fórmula H, e um conjunto de hipóteses,

$\beta = \{A_1, \ldots, A_n\}$

Então H é uma *consequência lógica de* β, por resolução, se existe uma prova de $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow H$.

Notações:

$\beta \vdash H$

$\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash H$

Algoritmo da prova por resolução

Processo para se provar G, dado $\beta = \{A_1, \ldots, A_n\}$:

1. Produzir fórmula $H = (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow G$
2. Negar H: $\neg H$
3. Transformar $\neg H$ para a forma clausal: $\neg H_c$
4. Fazer a expansão por resolução.
5. Caso a expansão seja fechada, a prova foi concluída.

Exemplo 1

Considerando que

- Guga é determinado.
- Guga é inteligente.
- Se Guga é determinado e atleta, ele não é um perdedor.
- Se Guga é um amante do tênis, então é um atleta.
- Se Guga é inteligente, então é um amante do tênis.

Verificar se a afirmação "Guga não é um perdedor" é uma consequência lógica dos argumentos acima.

- Guga é determinado:

  P
- Guga é inteligente:

  Q
- Se Guga é determinado e atleta, ele não é um perdedor:

  $(P \wedge R) \rightarrow \neg P_1$
- Se Guga é um amante do tênis, então é um atleta:

  $Q_1 \rightarrow R$

- Se Guga é inteligente, então é um amante do tênis:
  $Q \to Q_1$
- Logo, $H = (P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \to \neg P_1) \wedge (Q_1 \to R) \wedge (Q \to Q_1)) \to \neg P_1$
- Obtenção da fórmula clausal ($\neg H_c$) associada a $\neg H$:

$$\begin{aligned}
\neg H &= \neg((P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \to \neg P_1) \wedge (Q_1 \to R) \wedge (Q \to Q_1)) \to \neg P_1) \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg(P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \to \neg P_1) \wedge (Q_1 \to R) \wedge (Q \to Q_1)) \vee \neg P_1) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge ((P \wedge R) \to \neg P_1) \wedge (Q_1 \to R) \wedge (Q \to Q_1)) \wedge P_1 \\
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge (\neg(P \wedge R) \vee \neg P_1) \wedge (\neg Q_1 \vee R) \wedge (\neg Q \vee Q_1) \wedge P_1 \\
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge (\neg P \vee \neg R \vee \neg P_1) \wedge (\neg Q_1 \vee R) \wedge (\neg Q \vee Q_1) \wedge P_1
\end{aligned}$$

- Na notação de conjuntos:

$$\neg H_c = \{\{P\}, \{Q\}, \{\neg P, \neg R, \neg P_1\}, \{\neg Q_1, R\}, \{\neg Q, Q_1\}, \{P_1\}\}$$

- Expansão por resolução de $\neg H_c$:
  1. $\{P\}$
  2. $\{Q\}$
  3. $\{\neg P, \neg R, \neg P_1\}$
  4. $\{\neg Q_1, R\}$
  5. $\{\neg Q, Q_1\}$
  6. $\{P_1\}$
  7. $\{\neg Q, R\}$ *[Res(4, 5)]*
  8. $\{\neg P, \neg P_1, \neg Q\}$ *[Res(3, 7)]*
  9. $\{\neg P_1, \neg Q\}$ *[Res(1, 8)]*
  10. $\{\neg Q\}$ *[Res(6, 9)]*
  11. $\{\}$ *[Res(2, 10)]*
- Cláusula vazia: *expansão fechada* $\Rightarrow \vdash H$. H é uma tautologia.

Exemplo 2

- Considere os argumentos:
  - Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece se o ingresso é barato.
  - Se Guga joga uma partida de tênis, o ingresso é barato.
- Verifique se a afirmação "Se Guga joga uma partida de tênis, a torcida comparece" é uma consequência lógica dos argumentos acima.

$$G = ((P \to (R \to Q)) \wedge (P \to R)) \to (P \to Q)$$

Conjunto insatisfazível

Um conjunto β, por exemplo, dado por:

$$\beta = \{\neg P \vee Q, \neg(Q \vee \neg R), R \to P_1, \neg(\neg P \vee P_1)\}$$

é *insatisfazível* ou *não-satisfazível*.

Basta verificar que a fórmula

$H = \neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg(Q \vee \neg R) \wedge (R \to P_1) \wedge \neg(\neg P \vee P_1))$

é uma tautologia (exercício). *Dica:* use a negação da forma clausal, $\neg H_c$.

9.4 Exercícios

- Faça as seguintes demonstrações utilizando resolução:
  - $P \to P$
  - $\neg(P \to Q) \leftrightarrow (P \wedge (\neg Q))$
  - $(P \vee (P \wedge \neg P)) \leftrightarrow P$
- Determine se os conjuntos a seguir são insatisfazíveis
  - $\{\neg(P \to Q), \neg P \vee Q\}$
  - $\{P \to Q, P \vee Q, \neg Q\}$
- Demonstre os seguintes teoremas usando resolução:
  - $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
  - $((A \to (A \to B)) \wedge A) \to B$
  - $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
  - $((A \to B) \wedge \neg B) \to \neg A$
  - $((A \vee B) \vee C) \to (A \vee (B \vee C))$
  - $(P \to Q) \to ((\neg P \to Q) \to Q)$
  - O funcionário é demitido se o chefe o indica ou os colegas o escolhem. Se o funcionário é demitido e chora, então ele conquista os clientes. Se o funcionário conquista os clientes, ele não vai embora. O chefe indicou um funcionário e ele foi embora. Logo, o funcionário não chorou.
  - Se o programa é bom ou passa no horário nobre, o público assiste. Se o público assiste e gosta, então a audiência é alta. Se a audiência é alta, a propaganda é cara. O programa passa no horário nobre, mas a propaganda é barata. Logo, o público não gosta do programa.
  - Se Joana sente dor estômago, ela fica irritada. Se Joana toma remédio para dor de cabeça, ela sente dor de estômago. Joana não está irritada. Logo, ela não tomou remédio para dor de cabeça.

Referências

1. PAIVA, J. G. S. Lógica para Computação. Introdução – notas de aula.
2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.
3. MARTINS, L. G. A, Apostila de Lógica Proposicional, FACOM, UFU.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU

LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU

Parte II
Lógica de predicados

10 Sintaxe na lógica de predicados

10.1 Introdução

- *Lógica proposicional*: fórmulas são *veritativo-funcionais*:
  - Interpretações não dependem da estrutura interna de suas proposições, mas do modo como se combinam.
  - *Ex.:* $P \vee Q$
    Interpretação depende da interpretação isolada de P e Q, e do conectivo.

- Lógica proposicional *não consegue* representar todas as situações:
  - *Todo* aluno é inteligente.
  - A adição de dois números ímpares *quaisquer* é um número par.
  - Dado um número *qualquer*, *existe* um número primo maior que ele.
- *Limitação*: Expressões que envolvem *todo(s)*, *qual(is)quer*, *nenhum(ns)*, *algum(ns)*, etc.
- A representação é baseada em casos particulares, específicos.

- Exemplo de argumento:
  - Sócrates é homem
  - Todo homem é mortal
  - Logo, Sócrates é mortal
- Intuitivamente, sabemos que esse argumento é válido.
- Usando a lógica proposicional, teríamos a seguinte formalização:

$$\{P, Q\} \vdash R$$

- Não é possível demonstrar sua validade.
- *Problema*: palavra *"todo"*, que não pode ser expressa na lógica proposicional.

10.2 Lógica de predicados

- *Lógica de Predicados*: mais completa
- *Extensão* da lógica proposicional.
- Novos recursos:
  1. Quantificadores.
  2. Símbolos funcionais (funções);
  3. Predicados.

Alfabeto da lógica de predicados

1. *Símbolos de pontuação*: (,);
2. *Símbolos de verdade*: true, false;
3. Conjunto enumerável de *símbolos para variáveis*:
   x, y, z, w, x_1, y_1, z_1, etc.
4. Conjunto enumerável de *símbolos para funções*:
   f, g, h, f_1, g_1, h_1, etc.
5. Conjunto enumerável de *símbolos para predicados*:
   p, q, r, p_1, q_1, r_1, etc.
6. *Conectivos*:
   $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$.

Funções
Mapeamento de valores de entrada em valores de saída

Predicados
Relações, propriedades dos elementos do domínio

Aridade

- Funções e predicados possuem *argumentos*.
- *Aridade*: número de argumentos.
- Quando a aridade de uma função é 0, temos uma *constante*:
  a, b, c, a_1, b_1, c_1, etc.
- Quando a aridade de um predicado é 0, temos um *símbolo proposicional*:
  P, Q, R, S, P_1, Q_1, R_1, S_1, P_2, Q_2, etc.

Conectivos

- $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$: mesmo alfabeto da lógica proposicional
- *Quantificadores*:
  - $\forall$: para todo (*quantificador universal*)
  - $\exists$: existe (*quantificador existencial*)

Quantificador universal
Generalizações – $(\forall x)p(x)$:

- Todo homem é mortal.
- Todos os homens são mortais.
- Os homens são mortais.
- Homens são sempre mortais.
- Somente homens é que são mortais.
- Se é homem, então é mortal.

Quantificador existencial
Existência de pelo menos uma ocorrência – $(\exists x)p(x)$:

- Existe homem inteligente.
- Há homens inteligentes.
- Há pelo menos um homem inteligente.
- Algum homem é inteligente.

10.3 Elementos básicos da linguagem

- Linguagem natural possibilita sentenças cuja interpretação pode ser:
  - Um valor verdade:
    A capital de Minas Gerais é Belo Horizonte?
  - Um *objeto*:
    Qual a capital de Minas Gerais?

- *Lógica de predicados*:
  - *Termos*: sentenças que representam objetos
  - *Fórmulas*: sentenças que representam um valor de verdade

Termo

- *Variáveis* são termos;
- Se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos e f é um símbolo para *função n-ária*, então $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é um termo.
- Exemplos:
  - Variável x;
  - Constante a (função *zero-ária*);
  - $f(x, a)$, com f sendo uma *função binária*;
  - $g(y, f(x, a), c)$, com g sendo uma *função ternária* e f binária.
    - *Obs.:* Se f é binária, então a concatenação $f(y, x, z)$ *não* é um termo – f deve conter dois argumentos.
  - Se $h(x, y, z)$ é um termo, então, considera-se, implicitamente, que h é ternária.

- Exemplo (aritmética):
  - $+, -$: funções;
  - $1, 2, \ldots, 9, 0$: constantes;
  - $x, 9, y, 8$: termos (variáveis e constantes);
  - $+(5, 8)$: termo;
  - $+(-(8, 7), 3)$: termo.

- Exemplo: função *idade(pessoa)*:
  - idade(joao) = 25
  - idade(ana) = 18
- Exemplo: função *populacao(cidade)*:
  - populacao(Uberlandia)= 600.000
  - populacao(Chicago)= 2.700.000
- Exemplo: função *prefeito(cidade,ano)*:
  - prefeito(Uberlandia,2014)= *Gilmar*
  - prefeito(Uberlandia,2018)= *Odelmo*

Átomo

- Os símbolos verdade true e false são *átomos*.
- Se $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos e p é um símbolo para predicado *n-ário*, então $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é um átomo.
- Exemplos:
  - Símbolo verdade false;
  - Símbolo proposicional P (predicado *zero-ário*);
  - $p(f(x, a), x)$, com p um predicado binário, e x, a, $f(x, a)$ termos;
  - $q(x, y, z)$, com q um predicado ternário;
  - true, considerando true $= \neg$ false.

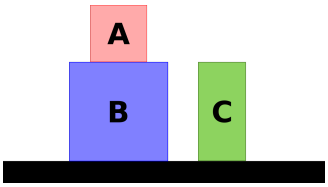
- Exemplo (aritmética):
  - $\neq$, $\leq$: predicados
  - $\leq (+(5, 8), 3)$: átomo, com valor false.
  - $\neq (-(8, 7), 3)$: átomo, com valor true.

- Exemplo – predicado *professor(pessoa)*:
  - professor(Renato)= true
  - professor(Maria)= false
- Exemplo – predicado *maisvelho(pessoa1, pessoa2)*:
  - maisvelho(Ana,Carlos)= true
  - professor(Joao,Maria)= false
- Exemplo – predicado *pertence(objeto, pessoa)*:
  - pertence(carro,Joana)= false
  - pertence(livro,Pedro)= true

Observação

- Resultados das interpretações dos átomos: *valores verdade*;
- Resultados das interpretações dos termos: *objetos*.

Exemplo



Exemplos de predicados:

- predicado *sobre*: sobre(A,B)= true
- predicado *cor*: cor(B,azul)= true ou predicado *azul*: azul(B)= true
- predicado *maior*: maior(B,C)= true

10.4 Fórmulas

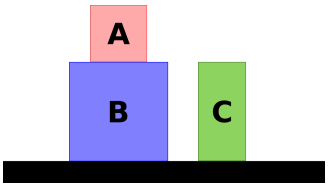
Construção pela concatenação de átomos e conectivos: *regras*

- Regras de definição:
  1. Todo átomo é uma fórmula;
  2. Se H é uma fórmula, $\neg H$ é uma fórmula;
  3. Se H e G são fórmulas, $H \vee G$, $H \wedge G$, $H \rightarrow G$, $H \leftrightarrow G$ são fórmulas;
  4. Se H é uma fórmula e x uma variável, então
     $(\forall x)H$ e $(\exists x)H$
     são fórmulas.

- Exemplos:
  - Os átomos $p(x)$, R e false são fórmulas;
  - $(\neg p(x) \vee R)$ é uma fórmula, assim como $p(x) \rightarrow R$;
  - Como $p(x) \rightarrow R$, então $(\forall x)(p(x) \rightarrow R)$ também é uma fórmula.
- *Expressão*: termo ou fórmula.

  Toda concatenação de símbolos *válida* na lógica de predicados é uma *expressão*.

Exemplo



Exemplo de fórmula:

- $H = \text{sobre}(A, B) \wedge \text{sobre}(B, mesa)$

Subtermo, subfórmula, subexpressão

Definem partes de um termo ou fórmula E:

- Se $E = x$, então x é *subtermo* de E;
- Se $E = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, então t_i e $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ são subtermos de E;
- Se t_1 é subtermo de t_2 e t_2 é subtermo de E, então t_1 é subtermo de E;
- Se H é uma fórmula e $E = \neg H$, então H e $\neg H$ são *subfórmulas* de E;
- Se H e G são fórmulas e E é uma das fórmulas $(H \vee G)$, $(H \wedge G)$, $(H \rightarrow G)$, $(H \leftrightarrow G)$, então H, G, e E são subfórmulas de E.
- Se H é uma fórmula, x uma variável, Δ um dos quantificadores $\forall$ ou $\exists$ e $E = (\Delta x)H$, então H e $(\Delta x)H$ são subfórmulas de E;
- Se H_1 é subfórmula de H_2 e H_2 é subfórmula de E, então H_1 é subfórmula de E;
- Todo subtermo ou subfórmula é uma subexpressão.

Exemplo:

- $H = ((\forall x)p(x)) \rightarrow (p(x)) \wedge ((\forall y)r(y))$;
- $G = p(x)$;
- A subfórmula G ocorre duas vezes em H;
- Como G não é igual a H, então G é uma *subfórmula própria* de H;

Ordem de precedência

1. $\neg$
2. $\forall$, $\exists$
3. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
4. $\vee$, $\wedge$

- Como na Lógica Proposicional, a ordem de precedência é útil na simplificação de fórmulas
- Exemplo:
  $((((\forall x)((\exists y)p(x,y))) \rightarrow (\exists z)(\neg q(z))) \wedge r(y))$
  - Simplificando: $(\forall x)(\exists y)p(x,y) \rightarrow (\exists z)\neg q(z) \wedge r(y)$

Correspondência entre quantificadores

- $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ podem ser escritos utilizando $\neg$, $\vee$ (alfabeto simplificado);
- Analogamente, é possível representar $\exists$ utilizando $\forall$, e vice-versa;
- Assim, é possível escrever o alfabeto da lógica de predicados usando apenas $\neg$, $\vee$, $\forall$.

Exemplo: "Existe carro que é bonito"

Considerando-se o conjunto dos carros:

- Representação: $(\exists x)p(x)$;
- $p(x) = T$ se, e somente se, x é bonito.

Se $(\exists x)p(x) = T$, então $(\forall x)\neg p(x) = F$

- $(\forall x)\neg p(x)$ representa a afirmação "Todo carro é feio".
- No entanto, se $(\forall x)\neg p(x) = F$, então $\neg((\forall x)\neg p(x)) = T$.
- $\neg((\forall x)\neg p(x))$ representa a afirmação "É falso que todo carro é feio" (pelo menos um é bonito).

Correspondência entre $\exists$ e $\forall$

- Seja H uma fórmula, e x uma variável;
- Os quantificadores $\exists$ e $\forall$ se relacionam de acordo com as seguintes correspondências:
  - $(\exists x)H = \neg((\forall x)\neg H)$
  - $(\forall x)H = \neg((\exists x)\neg H)$

Exemplo: considerando-se os seguintes predicados:

- $p(x) = T$ se, e somente se, x é de Uberlândia.
- $q(x) = T$ se, e somente se, x é professor.

As proposições abaixo podem ser construídas:

- $(\forall x)p(x)$: Todas as pessoas são de Uberlândia.
- $\neg(\forall x)p(x)$: Nem todas as pessoas são de Uberlândia.
- $(\exists x)q(x)$: Alguém é professor.
- $\neg(\exists x)q(x)$: Ninguém é professor.

Múltiplos quantificadores

- Quantificadores de mesmo tipo podem ser comutados:
  $(\forall x)(\forall y)p(x, y) = (\forall y)(\forall x)p(x, y)$
- Porém, quantificadores de tipos distintos *não* podem ser comutados:
  $(\forall x)(\exists y)p(x, y) \neq (\exists y)(\forall x)p(x, y)$

Comprimento de fórmulas

- Notação: $\text{comp}[H]$
- Se H é um átomo, então $\text{comp}[H] = 1$;
- Se $H = \neg G$, então $\text{comp}[\neg G] = \text{comp}[G] + 1$;
- Se H e G são fórmulas da lógica de predicados, então:
  - $\text{comp}[H \vee G] = \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1$
  - $\text{comp}[H \wedge G] = \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1$
  - $\text{comp}[H \rightarrow G] = \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1$
  - $\text{comp}[H \leftrightarrow G] = \text{comp}[H] + \text{comp}[G] + 1$

- Se $H = (\Delta x)G$, Δ sendo um dos quantificadores $\forall$ ou $\exists$, então $\text{comp}[(\Delta x)G] = \text{comp}[G] + 1$.

Exemplos:

- $H = (p(x) \to q(x))$

  $\text{comp}[H] = \text{comp}[p(x)] + \text{comp}[q(x)] + 1 = 3$

- $G = (\forall x)p(x) \leftrightarrow (\exists y)q(y)$

  $\text{comp}[G] = \text{comp}[(\forall x)p(x)] + 1 + \text{comp}[(\exists y)q(y)] = \text{comp}[p(x)] + 1 + 1 + \text{comp}[q(x)] + 1 = 5$

Observação
Se G é subfórmula de H, $\text{comp}[G] \leq \text{comp}[H]$

Variáveis

- *Escopo (abrangência)*: Seja E uma fórmula da lógica de predicados:
  - Se $(\forall x)H$ é subfórmula de E, então o escopo de $(\forall x)$ em E é a subfórmula H;
  - Se $(\exists x)H$ é subfórmula de E, então o escopo de $(\exists x)$ em E é a subfórmula H.

- O escopo de um quantificador em uma fórmula E é a subfórmula de E referida pelo quantificador (*"domínio"* do quantificador).

Exemplo: $E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \to (\forall y)q(z, y, x, z_1))$

- Escopo de $(\forall x)$ em E:

  $(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \to (\forall y)q(z, y, x, z_1))$

- Escopo de $(\exists y)$ em E:

  $(\forall z)p(x, y, w, z) \to (\forall y)q(z, y, x, z_1)$

- Escopo de $(\forall z)$ em E:

  $p(x, y, w, z)$

- Escopo de $(\forall y)$ em E:

  $q(z, y, x, z_1)$

Ocorrência livre e ligada

Sejam x uma variável e E uma fórmula:

- Uma ocorrência de x em E é *ligada* se x está no escopo de um quantificador $(\forall x)$ ou $(\exists x)$ em E.
- Uma ocorrência de x em E é *livre* se não for ligada.
- *Exemplo*: $E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \to (\forall y)q(z, y, x, z_1))$
- Identificando com sub-índices, temos:
  $E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x_g, y_g, w_v, z_g) \to (\forall y)q(z_v, y_g, x_g, z_{1v}))$
  - v: variáveis livres
  - g: variáveis ligadas
- Uma variável pode ocorrer livre e ligada em uma mesma fórmula (por exemplo, a variável z)
- A ocorrência da variável y está no escopo de dois quantificadores $(\exists y)$ e $(\forall y)$
  - Neste caso a ocorrência de y está ligada pelo quantificador mais próximo, $(\forall y)$.

Sejam x uma variável e E uma fórmula que contém x.

- A variável x é ligada em E se existe pelo menos uma ocorrência ligada de x em E
- A variável x é livre em E se existe pelo menos uma ocorrência livre de x em E
- *Exemplo*: $E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x_g, y_g, w_v, z_g) \to (\forall y)q(z_v, y_g, x_g, z_{1v}))$
  - x, y e z são ligadas em E;
  - w, z e z_1 são livres em E.
- Dada uma fórmula E, os seus símbolos livres são:
  - Variáveis que ocorrem livres em E;
  - Símbolos de função;
  - Símbolos de predicado.
- Exemplo: $E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \to (\forall y)q(z, y, x, z_1))$
  O conjunto $\{w, z, z_1, p, q\}$
- Uma fórmula é fechada se não possui variáveis livres.
  - Exemplo: $E_1 = (\forall w)(\exists z)(\forall z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \to ((\exists y)q(z, y, x, z_1))$

Fecho de uma fórmula

Seja H uma fórmula da lógica de predicados e $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o conjunto de variáveis livres em H.

- O *fecho universal* de H, $(\forall *)H$ é dado por
  $(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)H$
- O *fecho existencial* de H, $(\exists *)H$ é dado por
  $(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)H$

Exemplo: $E = (\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z_1))$

- $E_1 = (\forall w)(\forall z)(\forall z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow ((\forall y)q(z, y, x, z1))$ é o *fecho universal* de E.
- $E_2 = (\exists w)(\exists z)(\exists z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall z)p(x, y, w, z) \rightarrow ((\forall y)q(z, y, x, z_1))$ é o *fecho existencial* de E.

10.5 Exercícios

- Existe fórmula ou expressão sem símbolos livres?
- Quais os símbolos livres de uma fórmula fechada?
- Toda variável é símbolo livre?
- Dê um exemplo de:
  - Uma fórmula cujo fecho existencial contém apenas quantificadores universais.
  - Uma fórmula cujo fecho universal ou existencial não contém quantificadores.
  - Uma fórmula cujo fecho universal ou existencial é igual a ela própria.

- Dada a fórmula a seguir:
  $E = (\forall w)(\forall z)(\forall z_1)(\forall x)(\exists y)((\forall x)p(x, y, w, z) \rightarrow (\forall y)q(z, y, x, z_1))$,
  determine seus subtermos e subfórmulas.
- Determine o fecho universal e existencial das fórmulas a seguir:
  - $F_1 = p(x, y)$
  - $F_2 = (\exists x)p(x, y)$
  - $F_3 = (\exists y)(\exists x)p(x, y)$

Referências

1. PAIVA, J. G. S. *Lógica para Computação. Introdução* – notas de aula.

2. PEREIRA, S. L., *Lógica de Predicados*, disponível em http://www.ime.usp.br/~slago/IA-logicaDePredicados.pdf

3. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU

LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU

11 Semântica na lógica de predicados

11.1 Introdução

Objetivo
Associar *significado* aos símbolos das fórmulas da lógica de predicados

Definições mais elaboradas:

1. Quantificadores
2. Variáveis
3. Funções
4. Predicados

Exemplo 1

- $I[q(x)] = T$, se, e somente se $I[x]$ é par.
  - Domínio de I: *números* (interpretação no conjunto de números).
- Todo número é par
  - $I[x]$: dado uma variável x, $I[x] =$ número
  - q: símbolo de predicado tal que
    $I[q(x)] = T$, se e somente se $I[x]$ é par
    Resultado: $(\forall x)q(x)$

Exemplo 2
$H = (\forall x)(\exists y)p(x, y)$

- Significado de p: suponha $I[p] = <$:
  $I[p(x, y)] = T \Leftrightarrow I[x] < I[y] \Leftrightarrow x_I < y_I$
- $I[H] =$"para todo x_I", "existe y_I" tal que $x_I < y_I$

Qual a interpretação de H, true ou false?

- Ainda não é possível determinar se $I[H]$ é T ou F:
  - O que são x e y? Suponha que sejam números.
  - Que números x_I e y_I serão considerados? (Domínio U)
- $U = [0, \infty)$

- $I[H] = T$, pois para todo x_I, $x_I \in [0, \infty)$, existe y_I, $y_I \in [0, \infty)$, tal que $x_I < y_I$.

- $U = (-\infty, 0]$

  - $I[H] = F$, pois *é falso que* para todo x_I, $x_I \in (-\infty, 0]$, existe y_I, $y_I \in (-\infty, 0]$, tal que $x_I < y_I$.

    Se $x_I = 0$, não existe $y_I \in (-\infty, 0]$, tal que $x_I < y_I$.

- Nesse caso, não é necessário ter os resultados de $I[x]$ e $I[y]$ para se determinar $I[H]$.

  - Isso ocorre porque x e y *não são símbolos livres.*
  - Só é necessário definir a interpretação de p.

Exemplo 3
$G = (\forall x)p(x, y)$

- Símbolos livres: p, y
- Para determinar $J[G]$, é necessário definir $J[p]$ e $J[y]$.
- Considerando J em $U = (-\infty, 0]$ tal que $J[p] =\leq eJ[y] = -5$:

  - Neste caso, $J[G] = F$;

- Considerando J em $U = (-\infty, 0]$ tal que $J[p] =\leq$ e $J[y] = 0$:

  - Neste caso, $J[G] = T$.

Exemplo 4
$U = \{\text{José}, \text{Maria}, \text{Ana}, \text{Rodrigo}, \text{João}, \text{Júlia}\}$

- Conjunto de pessoas que estão cursando Lógica.
- Interpretação J em U:

  É possível escolher constantes a, b, c, a_1 , b_1, c_1 tais que:

  - $I[a] =$José
  - $I[b] =$Maria
  - $I[c] =$Ana
  - $I[a_1] =$Rodrigo
  - $I[b_1] =$João
  - $I[c_1] =$Júlia

$U = \{\text{José}, \text{Maria}, \text{Ana}, \text{Rodrigo}, \text{João}, \text{Júlia}\}$

- Tendo escolhido as constantes, podemos representar outras sentenças:
  - $I[p(x,y)] = T$ se, e somente se, $I[x]$ gosta de $I[y]$;
  - $I[q(x)] = T$ se, e somente se, $I[x]$ é inteligente;
  - $I[f(x)] = I[y]$ se, e somente se, $I[y]$ é o pai de $I[x]$.

$U = \{\text{José}, \text{Maria}, \text{Ana}, \text{Rodrigo}, \text{João}, \text{Júlia}\}$

- Se José gosta de Maria:

  $I[p(a,b)] = T$

- Se Ana é inteligente:

  $I[q(c)] = T$

- Se Rodrigo é pai de Júlia:

  $I[f(c_1)] =$Rodrigo $= I[a_1]$

- "todo aluno que está cursando Lógica é inteligente":

  $(\forall x)q(x)$

$U = \{\text{José}, \text{Maria}, \text{Ana}, \text{Rodrigo}, \text{João}, \text{Júlia}\}$

- Na fórmula $(\forall x)q(x)$, x pode ser substituído por qualquer elemento do domínio.
  - Variáveis que são argumentos dos predicados e funções são elementos que podem ser substituídos pelas constantes – elementos do domínio.

- *Quantificação universal*: *conjunção* sobre elementos do domínio:

  $I[(\forall x)q(x)] = T$ se, e somente se, $I[q(a)] = T$ *e* $I[q(b)] = T$ *e ... e* $I[q(c_1)] = T$.

- Analogamente, na *Quantificação existencial*: *disjunção* sobre elementos do domínio:

  $I[(\exists x)q(x)] = T$ se, e somente se, $I[q(a)] = T$ *ou* $I[q(b)] = T$ *ou ... ou* $I[q(c_1)] = T$.

Conjunto-verdade

Considerando U um domínio, e $p(x)$ um predicado aplicado em U, o *conjunto-verdade* de $p(x)$, indicado por V_p, é dado como

$$V_p = \{x | x \in U \wedge p(x) = T\}$$

ou

$$V_p = \{x \in U | p(x)\}$$

Se $p(x)$ é um predicado definido em U, então três casos podem ocorrer:

1. Condição (propriedade) *universal*: $p(x) = T$ para todo x em U.

   Conjunto-verdade de $p(x)$ é igual ao próprio U.

2. Condição (propriedade) *existencial*: $p(x)$ é verdadeira para alguns x em U.

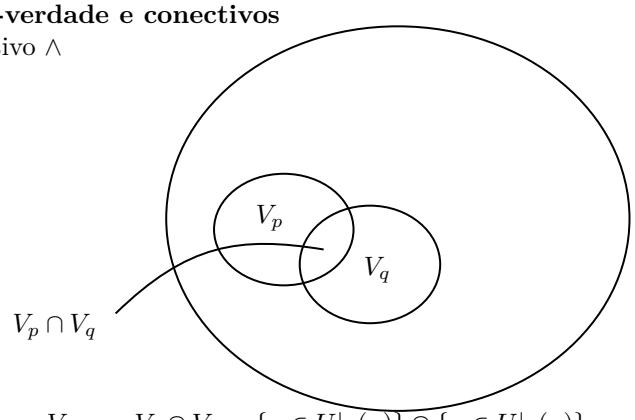
   Conjunto-verdade de $p(x)$ é um subconjunto de U.

3. Condição (propriedade) *impossível*: $p(x)$ é falsa para todos os x em U.

   Conjunto-verdade de $p(x)$ é vazio.

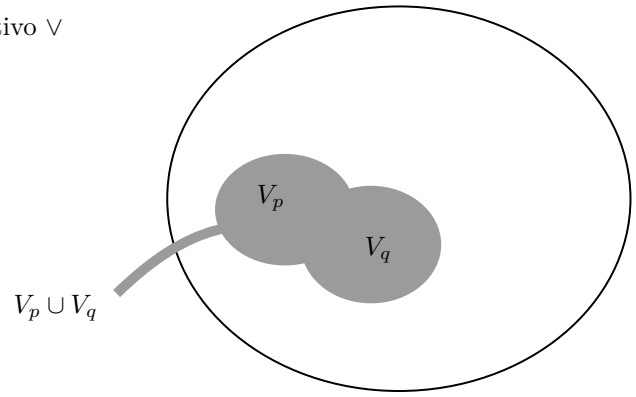
Conjuntos-verdade e conectivos

O conectivo $\wedge$



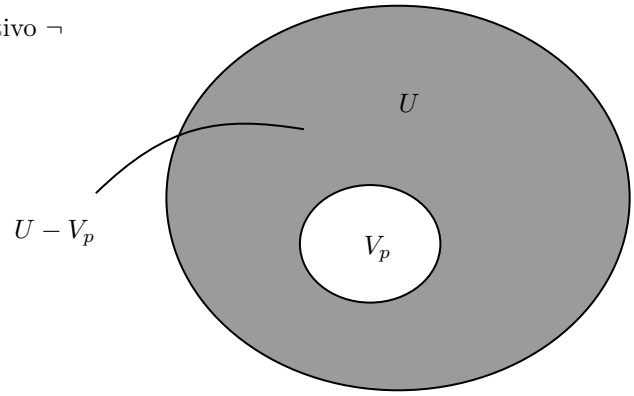
$$V_{p \wedge q} = V_p \cap V_q = \{x \in U | p(x)\} \cap \{x \in U | q(x)\}$$

O conectivo $\vee$



$$V_{p \vee q} = V_p \cup V_q = \{x \in U | p(x)\} \cup \{x \in U | q(x)\}$$

O conectivo $\neg$



$$V_{\neg p} = U - V_p = U - \{x \in U | p(x)\}$$

Para os conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, usamos as propriedades de substituição:

- O conectivo $\rightarrow$:

$$V_{p \rightarrow q} = V_{\neg p \vee q} = (U - V_p) \cup V_q$$

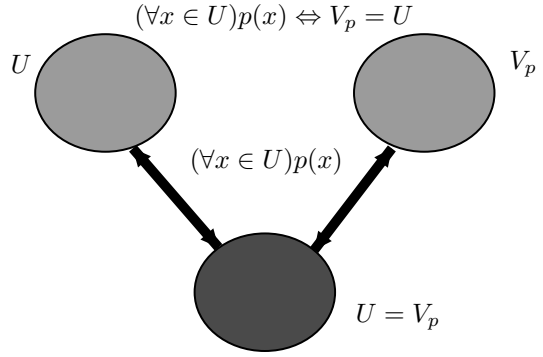
- O conectivo $\leftrightarrow$:

$$\begin{aligned} V_{p \leftrightarrow q} &= V_{p \rightarrow q} \cap V_{q \rightarrow p} \\ &= V_{\neg p \vee q} \cap V_{\neg q \vee p} \\ &= ((U - V_p) \cup V_q) \cap ((U - V_q) \cup V_p) \end{aligned}$$

Predicados com aridade maior que 1:

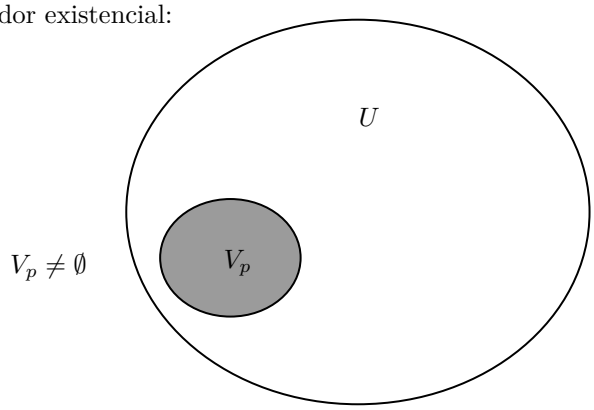
$$V_p = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n | p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$$

Quantificador universal:



$$(\forall x \in U)p(x) \Leftrightarrow p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)$$

Quantificador existencial:



$$(\exists x \in U)p(x) \Leftrightarrow p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n)$$

Resumo

- Para representar uma sentença como uma fórmula da lógica de predicados:
  - Domínio da interpretação;
  - Constantes na linguagem: nomes no domínio da interpretação;
  - Símbolos do predicado e de função: relações de predicado e funcionais entre os elementos do domínio.
- Para interpretar uma fórmula H com quantificadores, deve-se observar:
  - Domínio da interpretação;
  - Valor da interpretação dos símbolos livres de H.

11.2 Interpretação das variáveis, funções e predicados

Seja U um conjunto não-vazio, e I uma função de interpretação em U. Tem-se que:

- Domínio de I: conjunto dos símbolos de função, predicado e das expressões.
- Para toda variável x, se $I[x] = x_I$, então $x_I \in U$.
- Para toda função f, n-ária, se $I[f] = f_I$, f_I é uma função n-ária em U ($f_I : U^n \to U$).
- Para todo predicado p, n-ário, se $I[p] = p_I$, p_I é um predicado n-ário em U ($p_I : U^n \to \{T, F\}$).
- Se E é uma expressão, $I[E]$ é definida por um conjunto de regras semânticas.

Observações

- A interpretação de uma função zero-ária é igual à interpretação de uma constante.
- O resultado da interpretação de uma variável é um elemento do domínio.
- A interpretação de um predicado zero-ário é igual à interpretação de um símbolo proposicional.

Quantificadores

- *Enunciado categórico*: afirmação em linguagem natural que possui estrutura relativamente formal:
  - Todo S é P.
  - Nenhum S é P.
  - Algum S é P.
  - Algum S não é P.
- Essas afirmações podem ser lidas como
  - Todo x do domínio que é S, também é P.
  - Nenhum x do domínio que é S também é P.
  - Algum x do domínio que é S também é P.
  - Algum x do domínio que é S também não é P.
- Por sua vez, essas afirmações também podem ser lidas como:
  - Para todo x do domínio, se x é S, então x é P.
  - Para todo x do domínio, se x é S então não é P.
  - Existe pelo menos um x do domínio tal que x é S e x é P.
  - Existe pelo menos um x do domínio tal que x é S e x não é P.
- Finalmente, teremos:
  - $(\forall x)(s(x) \to p(x))$
  - $(\forall x)(s(x) \to \neg p(x))$
  - $(\exists x)(s(x) \wedge p(x))$
  - $(\exists x)(s(x) \wedge \neg p(x))$

11.3 Exercícios

1. Traduza as seguintes frases para a lógica de predicados, definindo todos os elementos necessários para a interpretação:

   - Todos os estudantes são inteligentes
   - Alguns estudantes inteligentes gostam de música
   - Todos que gostam de música são estudantes e cantores

2. Supondo os seguintes símbolos:

   - $A(x, y) =$"x ama y"
   - $j =$"João", $c =$"Cátia"
   - $V(x) =$"x é vistoso", $H(x) =$"x é um homem", $M(x) =$"x é uma mulher", $B(x) =$"x é bonita"

   Dê versões para o português para as fórmulas apresentadas abaixo:

   (a) $V(j) \wedge A(c, j)$
   (b) $(\forall x)(H(x) \rightarrow V(x))$
   (c) $(\forall x)(M(x) \rightarrow (\forall y)(A(x, y) \rightarrow (H(y) \wedge V(y))))$
   (d) $(\exists x)(H(x) \wedge V(x) \wedge A(x, c))$
   (e) $(\exists x)(M(x) \wedge B(x) \wedge (\forall y)(A(x, y) \rightarrow (V(y) \wedge H(y))))$
   (f) $(\exists x)(M(x) \wedge B(x) \rightarrow A(j, x))$

3. Interpretando as letras p, q, r e s como os predicados "É uma rã", "É verde", "É saltitante", "É iridescente", formalize as seguintes sentenças:

   (a) Todas as rãs são verdes.
   (b) Nenhuma rã é verde.
   (c) Algumas rãs são verdes.
   (d) Algumas coisas são verdes e algumas não são.
   (e) Não existem rãs iridescentes.
   (f) Algumas coisas são verdes e iridescentes simultaneamente.
   (g) Qualquer coisa ou é rã ou é iridescente.

11.4 Interpretação de expressões

Interpretação de expressões sem quantificadores

Seja E uma expressão e I uma interpretação sobre o domínio U.

A interpretação de E conforme I, indicada por $I[E]$, é determinada pelas regras:

- Se $E = \text{false}$, então $I[E] = I[\text{false}] = F$
- Se $E = f(t_1, \ldots, t_n)$, onde $f(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo, então $I[E] = I[f(t_1, \ldots, t_n)] = f_I(t_{1I}, \ldots, t_{nI})$, onde $I[f] = f_I$ e para todo termo t_i , $I[t_i] = t_{iI}$.
- Se $E = p(t_1, \ldots, t_n)$, onde $p(t_1, \ldots, t_n)$ é um átomo, então $I[E] = I[p(t_1, \ldots, t_n)] = p_I(t_{1I}, \ldots, t_{nI})$, onde $I[p] = p_I$ e para todo termo t_i , $I[t_i] = t_{iI}$.
- Se $E = \neg H$, onde H é uma fórmula, então $I[E] = I[\neg H] = T$ se $I[H] = F$ e $I[E] = I[\neg H] = F$ se $I[H] = T$.
- Se $E = H \vee G$, onde H e G são duas fórmulas, então $I[E] = I[H \vee G] = T$ se $I[H] = T$ e/ou $I[G] = T$ e $I[E] = I[H \vee G] = F$ se $I[H] = I[G] = F$.
- Para os outros conectivos, seguem as mesmas regras da lógica proposicional.

Exemplo 1

Considere as fórmulas

$$H = (\neg p(x, y, a, b)) \rightarrow r(f(x), g(y))$$
$$G = p(x, y, a, b) \rightarrow (q(x, y) \wedge r(y, a))$$

Seja I interpretação sobre o domínio dos números naturais, tal que:

- $I[x] = 3, I[y] = 2, I[a] = 0, I[b] = 1$
- $I[p(x, y, z, w)] = T \Leftrightarrow x_I \cdot y_I > z_I \cdot w_I$
- $I[q(x, y)] = T \Leftrightarrow x_I < y_I$
- $I[r(x, y)] = T \Leftrightarrow x_I > y_I$
- $I[f(x)] = (x_I + 1)$
- $I[g(x)] = (x_I - 2)$

A interpretação de H e G segundo I é dada pela seguinte tabela:

Sintaxe	x	y	a	b	$p(x, y, a, b)$	$f(x)$	$g(y)$	$q(x, y)$	$r(y, a)$	H	G
Semântica	3	2	0	1	T	4	0	F	T	T	F

Interpretação estendida

Paradigma da interpretação estendida:

Considere como exemplo uma interpretação I tal que, dadas 2 variáveis x e y,

$$I[x] = 5, \qquad I[y] = 1$$

Uma nova interpretação sobre x poderia ser feita. (Analogia: um segundo indivíduo convence o primeiro – que faz a interpretação – de que x deve ser interpretado como 7, e não 5). Esta nova interpretação do valor semântico de x, é denotada por $< x \leftarrow 7 > I$.

Sendo assim, mesmo que $I[x] = 5$:

$$< x \leftarrow 7 > I[x] = 7, \qquad < x \leftarrow 7 > I[y] = 1$$

- Uma outra interpretação pode ser feita sobre x novamente, resultando em, por exemplo, $< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I$.

  Assim, mesmo com $I[x] = 5$,

$$< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[x] = 8 \qquad < x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[y] = 1$$

- Uma terceira pode ser feita sobre y resultando em $< y \leftarrow 4 >< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I$.

  Assim, mesmo com $I[x] = 5$, e $I[y] = 1$,

$$< y \leftarrow 4 >< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[x] = 8$$
$$< y \leftarrow 4 >< x \leftarrow 8 >< x \leftarrow 7 > I[y] = 4$$

- Extensão mais à esquerda tem precedência.
- Quando não há extensões, considera-se a interpretação original.

Exemplo

$$I[x] = 4, \quad I[a] = 5, \quad I[y] = 4, \quad I[f] = +, \quad I[p] =>$$

- $< x \leftarrow 2 > I[y] = 4$,
- $< x \leftarrow 2 > I[f] = +$,
- $< x \leftarrow 2 > I[x] = 2$,
- $< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[y] = 9$,

- $< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[x] = 2,$
- $< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[y] = 9,$
- $< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[x] = 7,$
- $< y \leftarrow 1 >< x \leftarrow 7 >< y \leftarrow 9 >< x \leftarrow 2 > I[y] = 1$

Interpretação de fórmulas com quantificadores

Seja H uma fórmula, x uma variável e I uma interpretação sobre U.
$I[(\forall x)H]$ e $I[(\exists x)H]$ seguem as regras:

- $I[(\forall x)H] = T \Leftrightarrow \forall d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = T$
- $I[(\forall x)H] = F \Leftrightarrow \exists d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = F$
- $I[(\exists x)H] = T \Leftrightarrow \exists d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = T$
- $I[(\exists x)H] = F \Leftrightarrow \forall d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = F$

Exemplo 1

Seja I sobre os números naturais, tal que

$$I[x] = 3, \quad I[a] = 5, \quad I[y] = 4, \quad I[f] = +, \quad I[p] =<$$

Considere $G = (\forall x)p(x, y)$
Dada I acima, $I[G] = T$ ou F?

$$\begin{aligned} I[G] = T &\Leftrightarrow (\forall x)p(x, y) = T \\ &\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N}; < x \leftarrow d > I[p(x, y)] = T \\ &\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N}; d < 4 \text{ é verdadeiro.} \end{aligned}$$

Logo, considerando I, $I[G] = F$.

Exemplo 2

Seja I sobre os números naturais, tal que

$$I[x] = 3, \quad I[a] = 5, \quad I[y] = 4, \quad I[f] = +, \quad I[p] =<$$

Considere $E = (\forall x)(\exists y)p(x, y)$
Dada I acima, $I[E] = T$ ou F?

$$\begin{aligned} I[E] = T &\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)p(x, y) = T \\ &\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N}; < x \leftarrow d > I[(\exists y)p(x, y)] = T \\ &\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{N}; < y \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x, y)] = T \\ &\Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{N}; d < c \text{ é verdadeiro.} \end{aligned}$$

Logo, considerando I, $I[E] = T$.

Exemplo 3

Seja I sobre os números naturais, tal que

$$I[x] = 3, \quad I[a] = 5, \quad I[y] = 4, \quad I[f] = +, \quad I[p] =<$$

Considere $E_1 = E \wedge G$, onde

$$E = (\forall x)(\exists y)p(x, y)$$
$$G = (\forall x)p(x, y)$$

Neste caso, temos que $I[E_1] = F$, pois

$$I[E] = F \qquad I[G] = T$$

11.5 Exercícios

1. Seja I sobre os números racionais diferentes de zero:

$$I[a] = 1, \quad I[b] = 25, \quad I[x] = 13, \quad I[y] = 77, \quad I[f] = /, \quad I[p] =<$$

   Interprete as seguintes fórmulas:

   (a) $H = (\forall x)p(x, y)$
   (b) $H = (\exists x)p(x, y)$
   (c) $G = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(b, f(a, b))$
   (d) $H = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(f(a, b), b)$
   (e) $H = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(x, y)$
   (f) $H = (\forall x)((\exists y)p(x, y) \rightarrow p(x, y))$
   (g) $E = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(f(a, b), x)$

2. Usando os seguintes símbolos:

   $p(x) =$"x é uma pessoa" $q(x) =$"x é um período de tempo" $r(x, y) =$"x é enganado por y"

   Formalize os seguintes enunciados, no domínio formado pelo mundo inteiro:

   (a) Você pode enganar algumas pessoas durante todo o tempo.
   (b) Você pode enganar todas pessoas durante algum tempo.
   (c) Você não pode enganar todas as pessoas durante todo o tempo.

3. Se possível, determine interpretações que interpretem as fórmulas abaixo como verdadeiras e como falsas:

   (a) $(\forall x)(\exists y)p(x, y, z) \rightarrow (\exists y)(\forall z)p(x, y, z)$

   (b) $(\forall x)p(x) \leftrightarrow (\exists y)q(y)$

   (c) $(\forall x)(\forall x)p(x, y) \rightarrow (\exists y)q(y)$

4. Traduza as sentenças a seguir para a lógica de predicados:

   (a) As filhas de Carlos sao lindas e inteligentes, e todos os rapazes da Computação querem namorá-las

   (b) Toda pessoa ama alguém, mas não existe ninguém que ame todas

   (c) Não existe conjunto que contém a si próprio

   (d) Todo irmão do pai de Pedro é seu tio

   (e) Se alguém não ama ninguém, todos não amam todos

   (f) Quem não se ama não ama ninguém

   (g) Nenhum filho adolescente de Maria gosta de estudar

Referências

1. PAIVA, J. G. S. Lógica para Computação. Introdução – notas de aula.

2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU

LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU

12 Propriedades semânticas da lógica de predicados

12.1 Introdução

- Relacionamento entre os resultados das interpretações das fórmulas
- Mesmos conceitos da Lógica Proposicional:
  - Tautologia
  - Contradição
  - Satisfazibilidade
- Métodos diferentes de verificação:
  - Quantificadores
  - Variáveis
  - Funções
  - Predicados

12.2 Satisfazibilidade

- H é *satisfazível* quando existe pelo menos uma interpretação I tal que $I[H] = T$
- *Exemplo*: Considerando I sobre $\mathbb{N}$:
  - $H_1 = p(x, y)$
    $I_1 : I_1[p] =<,\ I_1[x] = 5,\ I_1[y] = 9$
  - $H_2 = (\forall x)p(x, y)$
    $I_2 : I_2[p] =\geq, I_2[y] = 0$
  - $H_3 = (\forall x)(\exists y)p(x, y)$
    $I_3 : I_3[p] =<$
  - $H_4 = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow p(x, y)$
    $I_4 : I_4[p] =<, I_4[x] = 5, I_4[y] = 9$

Exemplo: $H = \neg((\forall x)p(x, y)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x, z))$
Suponha:

- Domínio: $\mathbb{N}$

- $I[p(x,y)] = T \Leftrightarrow x$ e y são pares
- $I[y] = 4$, $I[z] = 6$.

$$I[H] = T \Leftrightarrow I[\neg((\forall x)p(x,y))] = I[(\exists x)(\neg p(x,z))]$$

$$I[\neg((\forall x)p(x,y))] = T \Leftrightarrow$$
$$I[(\forall x)p(x,y)] = F \Leftrightarrow$$

- $\exists d \in \mathbb{N} | < x \leftarrow d > I[p(x,y)] = F$
- $\exists d \in \mathbb{N} | d$ e/ou 4 são números ímpares
- $\exists d \in \mathbb{N} | d$ é um número ímpar.

Logo, $I[\neg((\forall x)p(x,y))] = T$.

$$I[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T \Leftrightarrow$$

- $\exists d \in \mathbb{N} | < x \leftarrow d > I[\neg p(x,z)] = T$
- $\exists d \in \mathbb{N} | < x \leftarrow d > I[p(x,z)] = F$
- $\exists d \in \mathbb{N} | d$ e/ou 6 são números ímpares
- $\exists d \in \mathbb{N} | d$ é um número ímpar.

Logo, $I[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T$.

Concluindo, $I[H] = T$. Ou seja, H é *satisfazível*, pois encontrou-se uma interpretação que a interpreta como verdadeira.

12.3 Validade ou tautologia

H é *válida* ou uma *tautologia* se, e somente se, *para toda interpretação* I, $I[H] = T$.

Logo, H não é válida se existe uma interpretação J, tal que $J[H] = F$.

Exemplo: $H = \neg((\forall x)p(x,y)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x,z))$

H é válida?

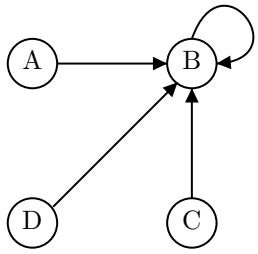
- $J[\neg((\forall x)p(x,y))] = T \Leftrightarrow J[(\forall x)p(x,y)] = F \Leftrightarrow$
  - $\exists d \in U | < x \leftarrow d > J[p(x,y)] = F$
  - $\exists d \in U | p(d,y) = F$

- $J[(\exists x)(\neg p(x,z))] = T \Leftrightarrow$

- $\exists d \in U| < x \leftarrow d > J[\neg p(x,z)] = T$
- $\exists d \in U| < x \leftarrow d > J[p(x,z)] = F$
- $\exists d \in U|p(d,z) = F$.

- $\exists d \in U|p(d,y) = F$ deve ser falsa e
- $\exists d \in U|p(d,z) = F$ deve ser verdadeira

- Suponha uma interpretação J sobre $U = \{A, B, C, D\}$
- J é definido de acordo com a figura:



  onde $p(r,s) = T$ se, e somente se, há uma seta de r para s.

- Além disso, suponha que
  - $J[y] = B$,
  - $J[z] = A$.
  - $\exists d \in U|p(d,y) = F$ equivale a
    - $\exists d \in U|p(d,B) = F$
    - Tal afirmação é falsa
  - $\exists d \in U|p(d,z) = F$ equivale a
    - $\exists d \in U|p(d,A) = F$
    - Tal afirmação é verdadeira

- Logo, $J[H] = F$
- Assim, H não é uma tautologia (válida) – encontrou-se uma interpretação J para a qual a fórmula é falsa.

Igualdade e interpretação

Sejam H e G duas fórmulas da lógica de predicados e I uma interpretação. Então:

- $I[H] = I[G]$ se, e somente se, $\{I[H] = T \Leftrightarrow I[G] = T\}$
- $I[H] = I[G]$ se, e somente se, $\{I[H] = F \Leftrightarrow I[G] = F\}$

Exemplo: $G = \neg((\forall x)p(x)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x))$

- G é uma tautologia se para toda interpretação J, $J[G] = T$;
- $J[G] = T \Leftrightarrow J[\neg((\forall x)p(x))] = J[(\exists x)(\neg p(x))]$;
- $J[\neg((\forall x)p(x))] = J[(\exists x)(\neg p(x))]$ se

  $J[\neg((\forall x)p(x))] = T \Leftrightarrow J[(\exists x)(\neg p(x))] = T$.
- $J[\neg((\forall x)p(x))] = T \Leftrightarrow$
  - $J[(\forall x)p(x)] = F \Leftrightarrow$
  - $\exists d \in U| < x \leftarrow d > J[p(x)] = F$
- $J[(\exists x)(\neg p(x))] = T \Leftrightarrow$
  - $\exists d \in U| < x \leftarrow d > J[\neg p(x)] = T$
  - $\exists d \in U| < x \leftarrow d > J[p(x)] = F$
- Assim:

$$J[\neg((\forall x)p(x))] = T \Leftrightarrow$$
$$\exists d \in U| < x \leftarrow d > J[p(x)] = F \Leftrightarrow$$
$$J[(\exists x)(\neg p(x))] = T$$

- Logo, $J[\neg((\forall x)p(x))] = J[(\exists x)(\neg p(x))]$, e portanto

  G é uma tautologia – bi-implicação onde ambos o lado esquerdo e direito têm sempre a mesma interpretação.

Exercício

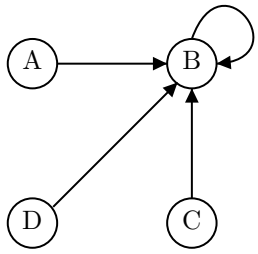
Determine se
$H = (\exists y)(\forall x)q(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x,y)$
é ou não uma tautologia.
Resolução:

$$I[H] = F \Leftrightarrow I[(\exists y)(\forall x)q(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x,y)] = F \Leftrightarrow$$
$$I[(\exists y)(\forall x)q(x,y)] = T \text{ e } I[(\forall x)(\exists y)q(x,y)] = F$$

- $I[(\exists y)(\forall x)q(x,y)] = T \Leftrightarrow$
  - $\exists d \in U| < y \leftarrow d > I[(\forall x)q(x,y)] = T$
  - $\exists d \in U$, $\forall e \in U| < x \leftarrow e >< y \leftarrow d > I[q(x,y)] = T$
  - $\exists d \in U$, $\forall e \in U|q_I(e,d) = T$
- $I[(\forall x)(\exists y)q(x,y)] = F \Leftrightarrow$
  - $\exists r \in U| < x \leftarrow r > I[(\exists y)q(x,y)] = F$
  - $\exists r \in U$, $\forall s \in U| < y \leftarrow s >< x \leftarrow r > I[q(x,y)] = F$
  - $\exists r \in U$, $\forall s \in U|q_I(r,s) = F$

$$\exists d \in U, \forall e \in U|q(e,d) = T$$
$$\exists r \in U, \forall s \in U|q(r,s) = F$$

- *Afirmações contraditórias.*
- Demonstração: Exemplo no universo dos conjuntos:



onde $q(r,s) = T$ se, e somente se, há uma seta de r para s.

As duas afirmações podem ser interpretadas por meio do diagrama anterior como segue, respectivamente:

- Existe $d \in U$ (no caso, o elemento B) tal que para todo elemento de U – incluindo B – existe uma flecha o ligando a B. Esta afirmação, portanto, está satisfeita pelo diagrama.

- Existe pelo menos um elemento r de U que não está ligado a nenhum outro – inclusive não se conecta a B do item anterior, o que gera a contradição. Note que esta não é satisfeita pelo exemplo do diagrama.

Por fim, como conclusão, H é uma tautologia, pois na tentativa de mostrar-se que existe I tal que $I[H] = F$, gerou-se uma contradição (mesmo raciocínio visto no método da negação, estudado na lógica proposicional).

Outro exemplo:

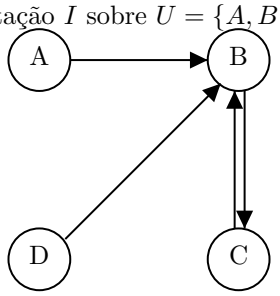
$E = (\forall x)(\exists y)q(x, y) \rightarrow (\exists y)(\forall x)q(x, y)$

Resolução:

- $I[(\forall x)(\exists y)q(x, y)] = T \Leftrightarrow$
  - $\forall d \in U| < x \leftarrow d > I[(\exists y)q(x, y)] = T$
  - $\forall d \in U$, $\exists e \in U| < y \leftarrow e >< x \leftarrow d > I[q(x, y)] = T$
  - $\forall d \in U$, $\exists e \in U|q_I(d, e) = T$

- $I[(\exists y)(\forall x)q(x, y)] = F \Leftrightarrow$
  - $\forall r \in U| < y \leftarrow r > I[(\forall x)q(x, y)] = F$
  - $\forall r \in U$, $\exists s \in U| < x \leftarrow s >< y \leftarrow r > I[q(x, y)] = F$
  - $\forall r \in U$, $\exists s \in U|q_I(s, r) = F$

Considere uma interpretação I sobre $U = \{A, B, C, D\}$:



onde $p(r, s) = T$ se, e somente se, há uma seta de r para s.

As situações descritas são satisfeitas pelo diagrama apresentado.

Conclui-se portanto que $I[E] = F$.

Ou seja, E não é uma tautologia, pois encontrou-se I onde E é falsa.

12.4 Implicação semântica

Exemplo: $H = (\forall x)p(x) \vDash G = p(a)$

- $H \vDash G \Leftrightarrow \forall I$, se $I[H] = T$ então $I[G] = T$.
- Suponha uma interpretação I sobre U, tal que $I[H] = T$.

$$
\begin{gathered}
I[H] = T \Leftrightarrow I[(\forall x)p(x)] = T \Leftrightarrow \\
\forall d \in U, < x \leftarrow d > I[p(x)] = T \Leftrightarrow \\
\forall d \in U, p(d) = T \\
\vDash \\
p(a) = T \Leftrightarrow \\
I[p(a)] = T \Leftrightarrow I[G] = T
\end{gathered}
$$

Insatisfazibilidade

Considere:

$$
\begin{aligned}
H &= (\forall x)(\exists y)E(x, y) \\
H_s &= (\forall x)E(x, f(x))
\end{aligned}
$$

onde E é uma fórmula que contém as variáveis (livres) x e y, e f é uma função qualquer.

Proposição: Se H é insatisfazível, então H_s (chamada de *skolemização de H*) é insatisfazível.

- H é insatisfazível $\Leftrightarrow$
- $I[(\forall x)(\exists y)E(x, y)] = F \Leftrightarrow$
- $\exists d \in U | < x \leftarrow d > I[(\exists y)E(x, y)] = F \Leftrightarrow$
- $\exists d \in U, \forall b \in U | < y \leftarrow b >< x \leftarrow d > I[E(x, y)] = F$
- $\exists d \in U, \forall b \in U | E_I(d, b) = F$.

Logo, existe $d \in U$ tal que, para qualquer b, temos $E_I(d, b) = F$.
Se f é uma função tal que $f_I(d) = b$:

- $I[H] = F \Leftrightarrow$
- $\exists d \in U, \forall b \in U | E_I(d, b) = F \Leftrightarrow$
- $\exists d \in U | E_I(d, f_I(d)) = F \Leftrightarrow$

- $\exists d \in U| < x \leftarrow d > I[E(x, f(x))] = F \Leftrightarrow$
- $I[(\forall x)E(x, f(x))] = F \Leftrightarrow$
- $I[H_s] = F$

Como I é uma interpretação qualquer, concluímos que, para toda interpretação I, $I[H_s] = F$.

Logo, se H é insatisfazível, H_s é insatisfazível, *cqd*.

Interpretação e variáveis que não ocorrem livres

Seja H uma fórmula, na qual uma variável x não ocorre livre.

Dada uma interpretação I sobre U, então

$$\forall d \in U, < x \leftarrow d > I[H] = I[H]$$

- *Exemplo:* $(\forall x)p(x)$
- $\forall d \in U, < x \leftarrow d > I[(\forall x)p(x)] = I[(\forall x)p(x)]$
- $\forall d \in U, < x \leftarrow d > I[(\forall x)p(x)] = T \Leftrightarrow$
- $\forall d \in U, \forall c \in U, < x \leftarrow c >< x \leftarrow d > I[p(x)] = T \Leftrightarrow$
- $\forall c \in U, < x \leftarrow c > I[p(x)] = T \Leftrightarrow$
- $I[(\forall x)p(x)] = T$

12.5 Exercícios

1. Demonstre que H e G são equivalentes:
   (a) $H = \neg(\exists y)H_1, G = (\forall y)\neg H_1$
   (b) $H = (\forall x)(\forall x)p(x), G = (\forall x)p(x)$
2. Mostre que as fórmulas a seguir são tautologias:
   (a) $H = (\forall x)p(x) \rightarrow p(a)$
   (b) $H = p(a) \rightarrow (\exists x)p(x)$
3. Verifique se as fórmulas a seguir são tautologias ou não:
   (a) $H = (\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)p(x)$
   (b) $H = (\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow (\exists y)p(y, y)$
4. Considere uma fórmula H onde x não ocorre livre, e uma fórmula G qualquer:

(a) Mostre que as fórmulas E_1 e E_2 são equivalentes, considerando:
$E_1 = (\forall x)(H \vee G)$
$E_2 = (H \vee (\forall x)G)$

(b) Mostre que as fórmulas a seguir são equivalentes:
$H = (\exists x)(p(x) \rightarrow r(x))$
$G = (\forall x)p(x) \rightarrow (\exists x)r(x)$

Referências

1. PAIVA, J. G. S. Lógica para Computação. Introdução – notas de aula.

2. SOUZA, J. N. *Lógica para Ciência da Computação*, Editora Campus, 2a. edição, 2008.

O material desta seção foi gentilmente cedido por J. Gustavo S. Paiva, FACOM/UFU

LaTeXagem e adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU