Cadeias de Markov

Prof. Renato Pimentel

2025/2

Sumário

1 Cadeias de Markov
- Introdução
- Definições e exemplos
- Distribuição estacionária
- Classificação dos estados e da cadeia
- Exercícios

Recapitulando

- Dois conceitos frequentemente utilizados em estatística são os de probabilidade condicional e variáveis aleatórias.
  - Serão importantes para modelar sistemas mais complexos de probabilidades.

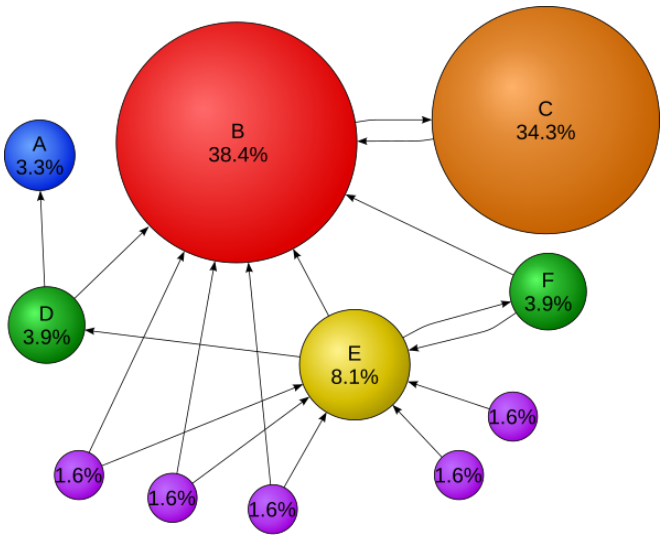
Como modelar uma sequência de eventos probabilísticos?

Cadeias de Markov

- Proposta por **Andrey Markov** (1856-1922).
- Estuda a probabilidade de um evento, dado o **estado atual**.
  - Isto é: **sem memória**.
- Pode modelar muitos fenômenos reais!

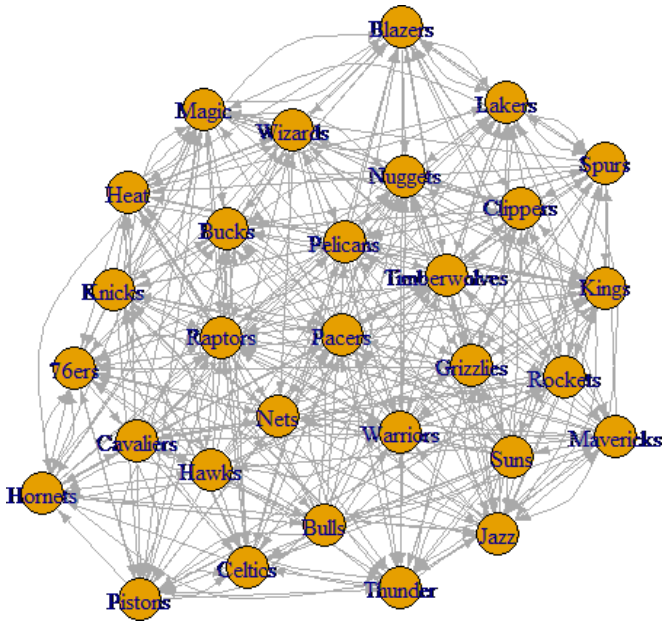
Exemplo: Google PageRank

- Algoritmo criado por Larry Page em 1998.
  - Aplicação: **SEO (Search engine optimization)**
- O valor de uma página depende de quantos, e **quais** – são importantes? – links apontam para ela.
- Representado como um **grafo direcionado (dígrafo)**.



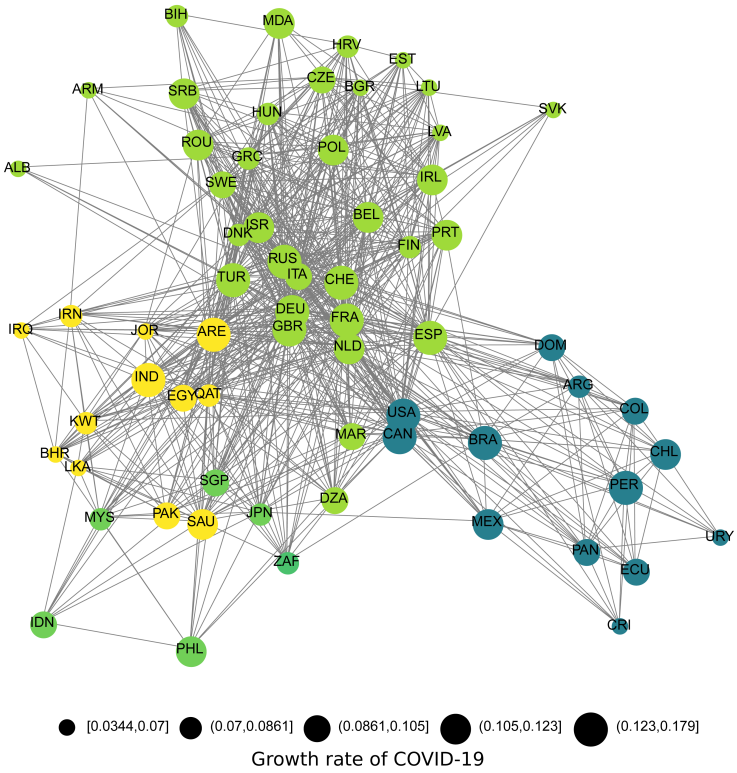
Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3470389

- Quando há um *link* da página A para B, A distribui PageRank para B.
  - O PageRank de A não diminui.
- O PageRank de B depende do número de *links* de saída da página A.
- É possível usar a ideia do PageRank em outros contextos.



https://www.samford.edu/sports-analytics/fans/2018/Google-PageRank-A-New-Metric-for-Gauging-NBA-Team-Quality

PageRank	Probability	NBA Rankings
Milwaukee Bucks	0.054728412	Toronto Raptors
Denver Nuggets	0.052846001	Denver Nuggets
Toronto Raptors	0.050120159	Golden State Warriors
Los Angeles Clippers	0.046840368	Philadelphia 76ers
Memphis Grizzlies	0.04505544	Los Angeles Clippers
Boston Celtics	0.042524281	Milwaukee Bucks
Portland Trail Blazers	0.042362373	Oklahoma City Thunder
New Orleans Pelicans	0.041653918	Los Angeles Lakers
Philadelphia 76ers	0.039411467	Indiana Pacers
Los Angeles Lakers	0.039068957	Memphis Grizzlies
Utah Jazz	0.03687766	Boston Celtics
Golden State Warriors	0.036647563	Detroit Pistons
Dallas Mavericks	0.034854419	Minnesota Timberwolves
Oklahoma City Thunder	0.033598566	New Orleans Pelicans
Houston Rockets	0.032752458	Portland Trail Blazers
Sacramento Kings	0.032688684	Dallas Mavericks
San Antonio Spurs	0.032624563	Orlando Magic
Detroit Pistons	0.031089585	Sacramento Kings
Orlando Magic	0.030336663	Utah Jazz
Minnesota Timberwolves	0.029565319	Charlotte Hornets
Indiana Pacers	0.027882959	Houston Rockets
Charlotte Hornets	0.027509829	San Antonio Spurs
New York Knicks	0.027162154	Washington Wizards
Washington Wizards	0.026712689	Miami Heat
Brooklyn Nets	0.023968132	Brooklyn Nets
Miami Heat	0.022871781	New York Knicks
Phoenix Suns	0.020574902	Atlanta Hawks
Cleveland Cavaliers	0.014521764	Chicago Bulls
Atlanta Hawks	0.012918961	Cleveland Cavaliers
Chicago Bulls	0.010229974	Phoenix Suns



(COELHO, 2020). https://doi.org/10.7717/peerj.9708

Sumário

1. Cadeias de Markov
   - Introdução
   - Definições e exemplos
   - Distribuição estacionária
   - Classificação dos estados e da cadeia
   - Exercícios

Cadeias de Markov

- Seja o **processo estocástico** $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$.
  - Se $X_n = i$, então o processo encontra-se no estado i no tempo n.
- O processo é uma **cadeia de Markov** se a probabilidade do futuro é computada dado o presente, e independente do passado (**propriedade markoviana**):

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i,\, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P_{ij}$$

- O **espaço de estados** deve ter dimensão constante.

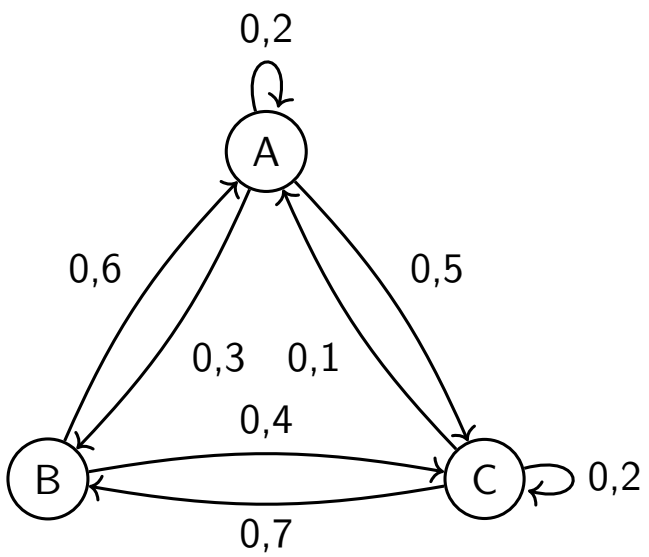
Representação Computacional

- Utiliza-se uma **matriz de probabilidade de transição** $P = (P_{ij})$.
- Matriz quadrada onde cada entrada P_{ij} representa a probabilidade de ir do estado atual, i, para o estado j, no instante de tempo seguinte.

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{n} \end{array} \overbrace{\begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}^{\text{n+1}}$$

- Também chamada simplesmente de **matriz de transição** ou **matriz markoviana**.

Exemplo com três estados



- Neste caso,

$$P = \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ B & 0,6 & 0 & 0,4 \\ C & 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{array}$$

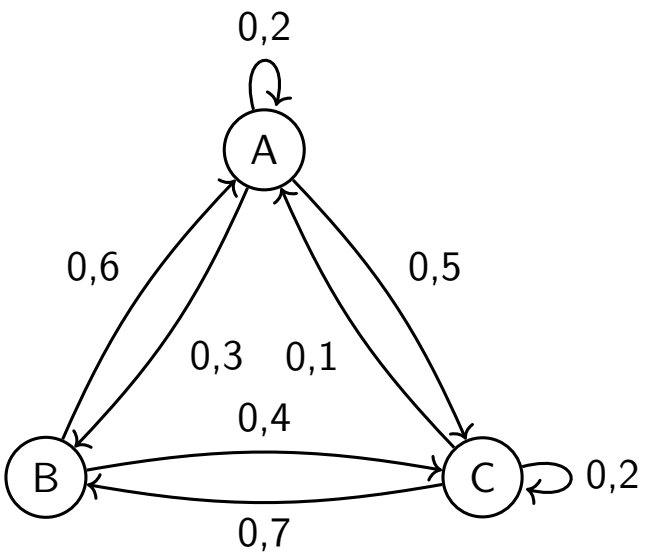
- Note que:
  - $P_{ij} \geq 0, \forall i, j$;
  - $\sum_j P_{ij} = 1, \forall i$.

Exercício

A partir da matriz de transição abaixo, desenhe a Cadeia de Markov.

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Exemplo



Sejam A, B e C as cidades de Amsterdã, Berlim e Copenhague, respectivamente.

- Dado que $X_0 = A, X_1 = B, X_2 = A, X_3 = C$, qual a probabilidade de que X_4 seja igual a B?
  - $P(X_4 = B | X_3 = C) = 0,7$.
- Qual a probabilidade da caminhada inteira, de X_0 a X_4?
- Simulando o caso (Monte Carlo): **caminhada aleatória**.
  - As probabilidades de visitar cada cidade tendem ao **equilíbrio** (**distribuição estacionária**).

Probabilidade após n passos

- Vimos que $P(X_4 = B|X_3 = C) = 0,7$.
- Também pode ser de interesse calcular

$$P(X_4 = B|X_2 = C)\,.$$

  - Note que isto equivale a calcular

$$\begin{aligned} &P(X_3 = B|X_1 = C) \text{ ou} \\ &P(X_2 = B|X_0 = C) \text{ ou} \\ &P(X_9 = B|X_7 = C) \text{ ou} \\ &P(X_{k+2} = B|X_k = C)\,. \end{aligned}$$

  - Vamos usar a notação $P_{CB}^{(n)}$. Neste caso, $n = 2$.

- No caso mais geral: qual a probabilidade $P_{ij}^{(n)}$ de, a partir do estado i, chegar ao estado j após n passos?
- Por exemplo, seja a cadeia de Markov representada pela matriz de transição

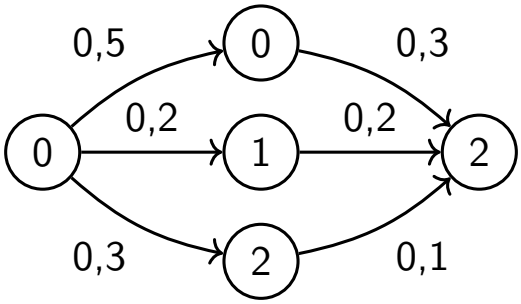
$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{bmatrix}\,.$$

  - Neste caso,

$$P_{02}^{(1)} = P(X_1 = 2|X_0 = 0) = P_{02} = 0,3$$

  - E como calcular $P_{02}^{(2)}$?

- Possibilidades:



  - A probabilidade de ir de 0 para 2 em dois passos, permanecendo em 0 no estado intermediário, é dada pelo produto: $P_{00} \cdot P_{02} = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$.
  - A probabilidade de ir de 0 para 2 em dois passos, passando pelo estado 1, é dada pelo produto: $P_{01} \cdot P_{12} = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$.
  - A probabilidade de ir de 0 para 2 em dois passos, indo de 0 para 2, e depois permanecendo em 2, é dada pelo produto: $P_{02} \cdot P_{22} = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03$.
- Ou seja,

$$P_{02}^{(2)} = P_{00} \cdot P_{02} + P_{01} \cdot P_{12} + P_{02} \cdot P_{22} = 0,15 + 0,04 + 0,03 = 0,22$$

- Ou seja, considerando-se a matriz de transição P e o **produto matricial**, temos:

$$P_{02}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{bmatrix} = 0,22 = \left(P^2\right)_{02} .$$

- Notando que

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,38 & 0,22 \\ 0,44 & 0,32 & 0,24 \\ 0,54 & 0,26 & 0,2 \end{bmatrix} ,$$

vemos que $P_{ij}^{(2)} = \left(P^2\right)_{ij}$, $\forall i, j$.

Equações de Chapman-Kolmogorov

- Notando que, por exemplo, $P^3 = P^2\, P$, é possível generalizar o produto, para qualquer número de passos n:

$$P_{ij}^{(n)} = (P^n)_{ij}\,,\ \forall i, j\,.$$

- Como $P_{ij}^{(n)} = P\left(X_{k+n} = j | X_k = i\right)$, é possível fazer a generalização dada por

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)}, \quad \forall n, m \geq 0, \forall i, j\,.$$

(**equações de Chapman-Kolmogorov**).

- Em particular, se $n \to \infty$,

$$P_{ij}^{(\infty)} = (P^{\infty})_{ij}\,,\ \forall i, j\,.$$

- Em geral, após muitas transições, a distribuição tende a uma **distribuição estacionária**.
  - Representa a **frequência de visitação a cada estado**.

Sumário

1. Cadeias de Markov
   - Introdução
   - Definições e exemplos
   - Distribuição estacionária
   - Classificação dos estados e da cadeia
   - Exercícios

Distribuição estacionária

- Vimos que quando $n \to \infty$, a n-ésima potência da matriz de transição P tende a uma matriz constante, P^{∞}.
- Em particular, é de interesse saber a frequência de visitação a cada estado mencionada anteriormente.
- Seja $\tilde{\boldsymbol{\pi}} = [\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \cdots, \tilde{\pi}_{r-1}]$ o vetor linha contendo tais frequências. Tal vetor pode ser determinado resolvendo-se a equação

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}} = \tilde{\boldsymbol{\pi}} \boldsymbol{P} \,,$$

considerando-se que $\tilde{\pi}_0 + \tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_2 + \cdots + \tilde{\pi}_{r-1} = 1$.

Exercício

Uma caixa contém duas bolas, que podem ser ambas vermelhas, ambas azuis, ou uma de cada cor. A cada passo, uma bola é sorteada e substituída por uma nova bola, que tem 80% de chance de ser da mesma cor. Após um número grande de sorteios, qual a probabilidade de se sortear uma bola vermelha?

Dicas: considere a v. a. X_n como sendo a quantidade de bolas vermelhas após n retiradas. Defina A_n como sendo o evento "bola sorteada é vermelha após n retiradas". É preciso calcular então $P(A_n)$.

Exercício

Uma caixa contém duas bolas, que podem ser ambas vermelhas, ambas azuis, ou uma de cada cor. A cada passo, uma bola é sorteada e substituída por uma nova bola, que tem 80% de chance de ser da mesma cor. Se inicialmente ambas são vermelhas, qual a probabilidade de que a quinta bola retirada seja vermelha?

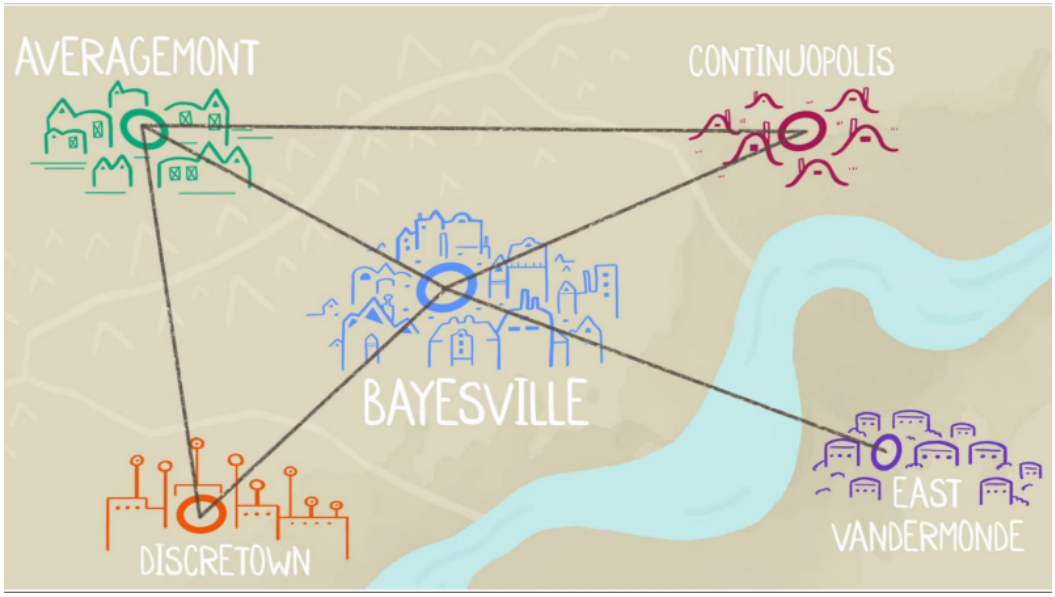
Dicas: considere a v. a. X_n como sendo a quantidade de bolas vermelhas após n retiradas. Defina A_5 como sendo o evento "a quinta bola sorteada é vermelha". É preciso calcular então $P(A_5|X_0 = 2)$.

Exercício

Zeca vai ao McDonalds todos os dias, e sempre pede um BigMac, uma porção de fritas ou um milk-shake. Ele nunca pede o mesmo duas vezes seguidas, e joga uma moeda para decidir qual das duas outras opções escolher (ex. se comeu BigMac hoje, ele joga uma moeda para decidir se amanhã pede fritas ou milk-shake).
Seja X_n o pedido de Zeca no n-ésimo dia. Calcule
$P(X_n = \text{BigMac} | X_0 = \text{BigMac})$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ e $n \to \infty$.

Exercício

Simule uma caminhada na cadeia de Markov ilustrada na imagem, com probabilidades iguais de saída de cada estado. Encontre a distribuição estacionária resultante.

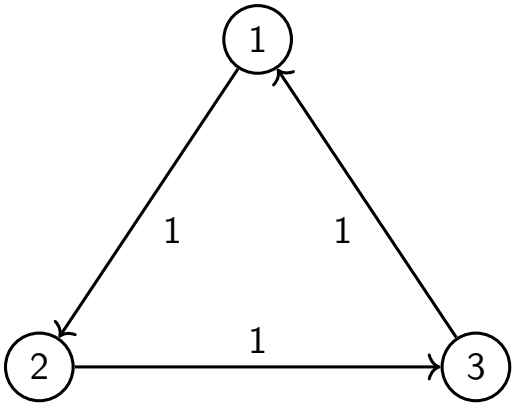


Sumário

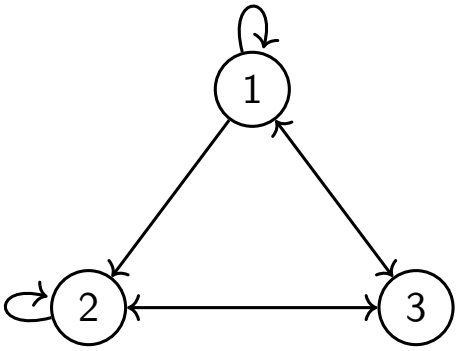
1. Cadeias de Markov
   - Introdução
   - Definições e exemplos
   - Distribuição estacionária
   - Classificação dos estados e da cadeia
   - Exercícios

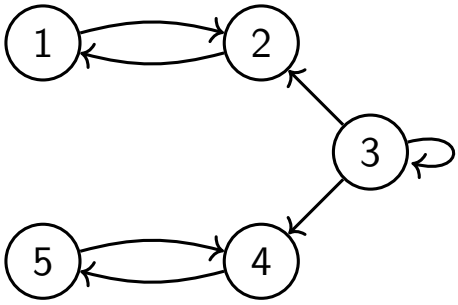
Periodicidade e irredutibilidade

- **Periodicidade**: uma cadeia de Markov é **periódica** quando a caminhada pode retornar para um determinado estado apenas em números múltiplos de algum inteiro > 1.
  - A análise do estado de equilíbrio é afetada.



- **Irredutibilidade**: uma cadeia de Markov é **irredutível** se para quaisquer dois estados $i, j \in S$, é possível chegar a j, a partir de i, e vice-versa.
  - I.e. é possível alcançar qualquer estado a partir de qualquer outro.
- Qual das duas cadeias abaixo é irredutível?

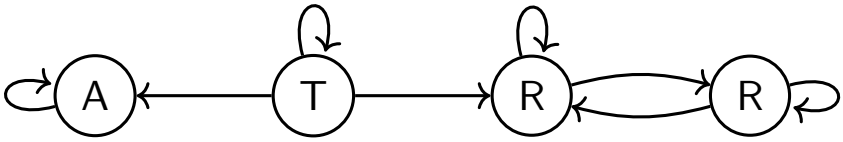




Estados

Seja f_i a probabilidade de, a partir de um estado i, regressarmos ao mesmo em algum momento. Dizemos que i é:

- **Transiente**, quando, uma vez que saímos do estado, podemos nunca mais voltar ($f_i < 1$);
- **Recorrente**, quando é garantido que passaremos novamente por i – $f_i = 1$;
- **Absorvente**, quando, ao chegarmos em i, nunca mais podemos sair (estado i é tal que $P_{ii} = 1$).



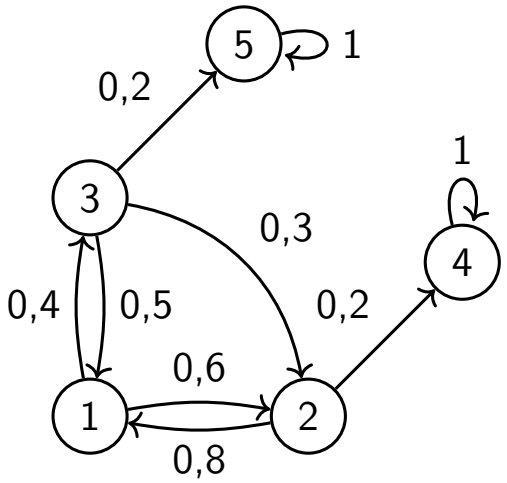
Análise do primeiro passo

Permite algumas análises/quantidades de interesse:

1. **Probabilidade de absorção**: partindo-se de um estado i, qual a probabilidade u_{ij} de chegarmos a um estado absorvente j?
2. **Tempo médio de absorção**: começando-se em i, quantos passos em média, v_i, até sermos absorvidos por algum estado absorvente?
3. **Tempo médio até a primeira visita**: começando-se em i, quantos passos em média, v_{ij}, até chegarmos a um estado j qualquer?
4. **Tempo médio de recorrência**: começando-se em j recorrente, quantos passos em média, ${v_{jj}}^*$, até regressarmos a j?

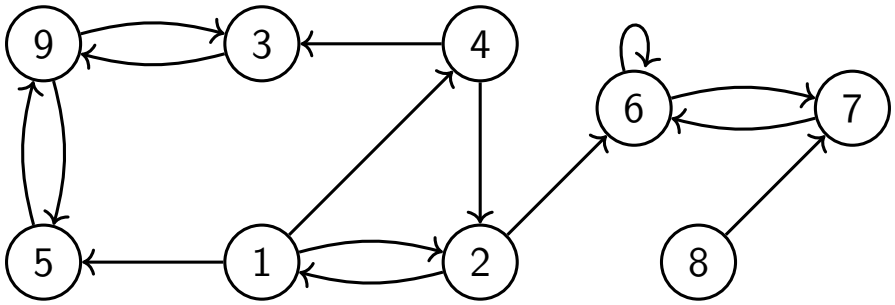
Probabilidade de absorção

- Qual a probabilidade de cairmos no estado absorvente 4?
- Depende do **estado inicial**! Então, melhorando a pergunta: qual a probabilidade u_{i4}, ou seja, a chance de se chegar em 4 se começamos em i?
  - $u_{44} = 1$, e $u_{54} = 0$
  - E para os estados transientes?
    Sistema:
    $u_{i4} = \sum_j p_{ik} u_{k4}$.
- (Aproveite e calcule u_{i5})



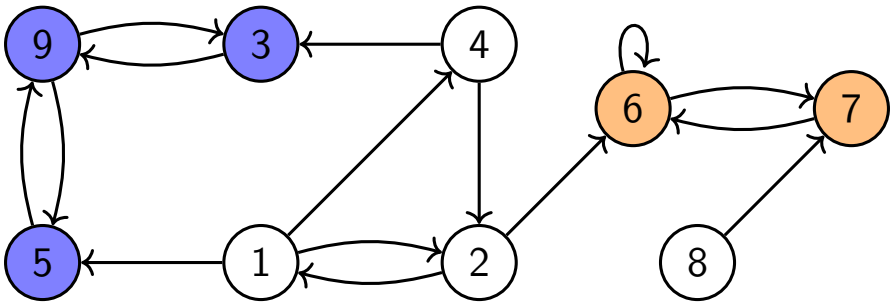
E nesse caso?

- Em que lugares diferentes a caminhada pode ser absorvida?
- Como calcular a probabilidade de absorção nesse caso?
- Vamos assumir que cada passo saindo de um estado tem probabilidade igual.
- **Calcule a probabilidade de absorção.**



Classes de recorrência

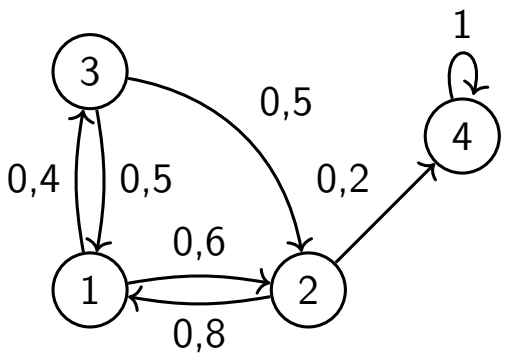
- Definidas como os subconjuntos formados pelos estados recorrentes da cadeia que podem sempre ser alcançados entre si após uma ou mais transições;
- No dígrafo associado à cadeia, correspondem às **componentes fortemente conexas** (CFCs) que não possuem estados transientes.
- Um **estado absorvente** define uma classe de recorrência formada apenas por si próprio (CFC trivial).
- Uma cadeia irredutível é um **dígrafo fortemente conexo**, de modo que a única classe corresponde à própria cadeia.



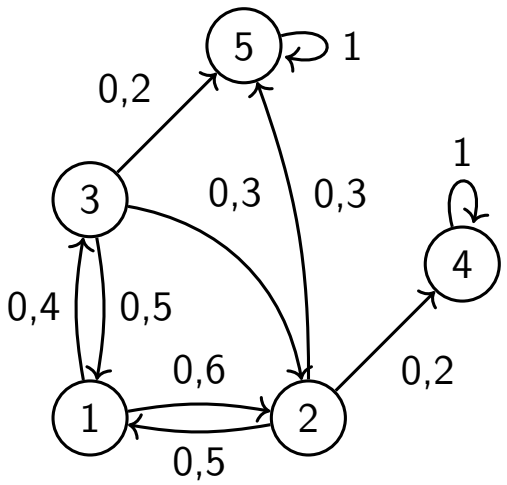
Tempo esperado/médio de absorção

- Quantas transições (passos) posso esperar de uma caminhada aleatória até ser absorvida pelo estado de absorção 4?
- **Sistema**:

$$v_i = 1 + \sum_j p_{ik} v_k$$



- E se tivermos **dois** (ou mais) estados de absorção, como no novo grafo à direita?
  Qual o número de passos esperado nesse caso?
  - (Faz mais sentido calcular o número de passos esperado para **qualquer** absorção)

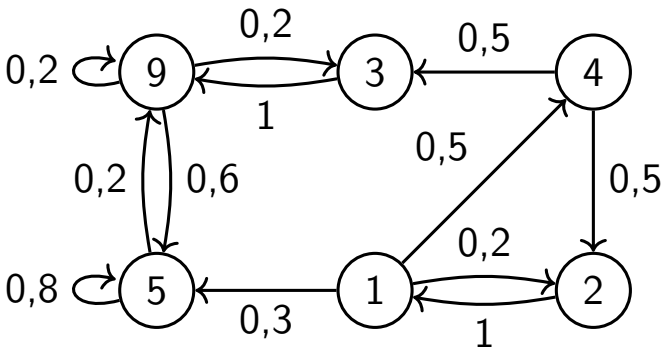


Tempo médio até a primeira visita

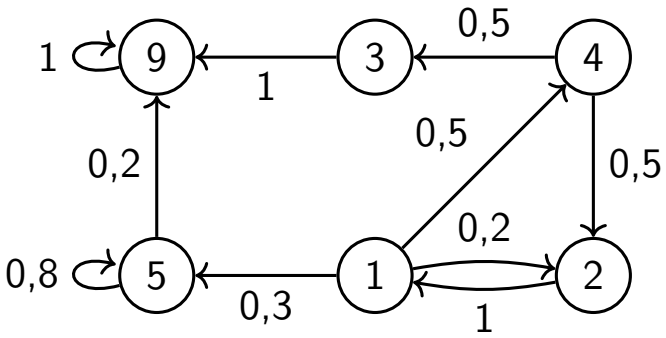
- Quantos passos v_{19} para sair de 1 e passar por 9 pela primeira vez?
  - $v_{ij} = E[\min\{n \geq 0 | X_n = j\} | X_0 = i]$;
  - Vamos tratar 9 como **estado absorvente** (i.e., não estamos interessados nas arestas partindo de 9);
  - Solução única do **sistema**

    $v_{i9} = 1 + \sum_k p_{ik} v_{k9}$,

    onde $v_{99} = 0$.



Cadeia modificada:



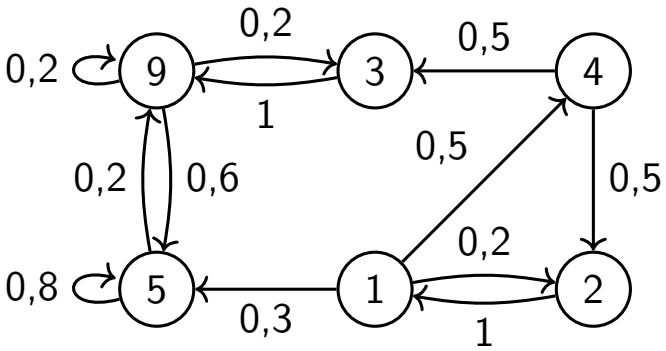
Tempo médio de recorrência

- Quantos passos $v_{99}{}^*$ para sair de e retornar a 9 pela primeira vez?
  - $v_{jj}{}^* = E[\min\{n \geq 1 | X_n = j\} | X_0 = j]$, sendo que $v_{jj} = 0$;
  - Não se modifica a cadeia original;
  - Solução única do **sistema**

$$v_{i9} = 1 + \sum_k p_{ik} v_{k9}, \quad i \neq 9,$$

$$v_{99}{}^* = 1 + \sum_{k \neq 9} p_{ik} v_{k9},$$

onde $v_{99} = 0$.



Sumário

1. Cadeias de Markov
   - Introdução
   - Definições e exemplos
   - Distribuição estacionária
   - Classificação dos estados e da cadeia
   - Exercícios

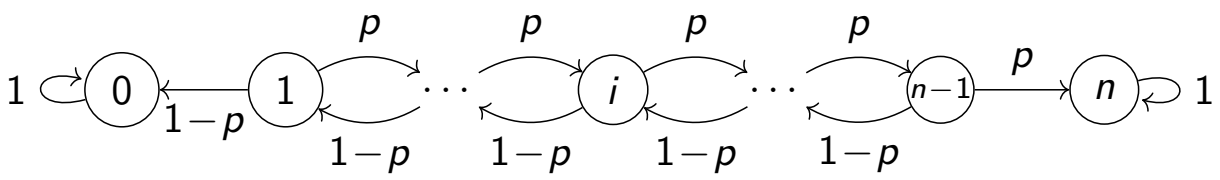
Exercícios

Em uma série de lançamentos de moedas:

1. Quantos lançamentos de moeda são esperados até obtermos três caras consecutivas? E para obtermos "coroa, cara, cara"?
2. Qual a probabilidade de obtermos duas coroas antes de três caras?

A ruína do apostador

- Um jogador começa a jogar um jogo de apostas com dinheiro i.
- Ele aposta \$ 1 de cada vez, e pode ganhar mais 1 (probabilidade p), ou perder o que apostou – probabilidade $q \equiv 1 - p$. O jogador só para quando chega a um certo valor n, ou quando fica sem dinheiro.
- Podemos modelar o problema como uma cadeia de Markov:



- Qual a probabilidade de alcançar seu objetivo? E a de ficar sem nada?
- Qual é o valor esperado de dinheiro do jogador? Quanto tempo demora o jogo?

Caso justo ($p = 1/2$)

- Probabilidade $u_{i,n}$ de chegar a n:
  solução do **sistema tridiagonal** obtido a partir da análise do primeiro passo:

$$u_{i,n} = i/n, \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

  - E a chance de ruína, $u_{i,0}$?
- Dinheiro esperado:

$$E(X) = 0 \cdot (1 - u_{i,n}) + n \cdot u_{i,0} = ?$$

- Quanto tempo dura o jogo – número de passos para absorção (ruína ou objetivo):
  solução do **sistema tridiagonal** obtido a partir da análise do primeiro passo:

$$v_i = i \cdot (n - i), \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

- E para um **jogador inveterado** que joga a longo prazo e "reinveste" seus ganhos no jogo? E se o jogo não é "justo" (50% de sucesso)?
- No **caso geral** – $p \neq 1/2$:

$$u_{i,n} = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}, \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

- Para um jogador inveterado, $n \to \infty$. Neste caso,

$$u_{i,n} \to \begin{cases} 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i, & \text{se } p > 1/2\,, \\ 0\,, & \text{se } p \leq 1/2\,. \end{cases}$$

- Em suma: dinheiro finito $\times$ dinheiro infinito $=$ **ruína**.

Processo de Bernoulli

- Como modelar nosso experimento de jogar moedas e contar as caras como uma cadeia de Markov?
- Quais são as limitações da cadeia de Markov para descrever esse tipo de processo?
- Nas próximas aulas: **processo de Poisson**.