Processos de Poisson

Prof. Renato Pimentel

2025/2

Sumário

1. Processos de Poisson
   - Introdução
   - Processo de Bernoulli
     - Definições básicas e exemplos
     - Probabilidade e número esperado de sucessos
     - Tempo esperado até o primeiro sucesso
   - Processo de Poisson
     - Definições básicas e exemplos
     - Contagem
     - Probabilidade e número esperado de eventos
     - Tempos de espera até o primeiro e demais eventos
     - Outras propriedades

Recapitulando

- Até aqui, foram abordadas as cadeias de Markov de tempo discreto. Façamos gradualmente a transição para tempo contínuo.
- Começando com o processo de Bernoulli, ainda em tempo discreto.

Sumário

1. Processos de Poisson
   - Introdução
   - Processo de Bernoulli
     - Definições básicas e exemplos
     - Probabilidade e número esperado de sucessos
     - Tempo esperado até o primeiro sucesso
   - Processo de Poisson
     - Definições básicas e exemplos
     - Contagem
     - Probabilidade e número esperado de eventos
     - Tempos de espera até o primeiro e demais eventos
     - Outras propriedades

Processo de Bernoulli

- Processo estocástico definido por uma sequência de experimentos $\{X_i,\ i = 1, 2, \dots\}$ com chance de **sucesso** ou **falha**.
- Cada tentativa i é tal que:

$$\begin{cases} P(X_i = 1) = P(\text{sucesso}) = p \\ P(X_i = 0) = P(\text{falha}) = 1 - p\,. \end{cases}$$

- Considerações chave:
  - Experimentos independentes.
  - Homogeneidade ao longo do tempo (p permanece o mesmo).

Jacob Bernoulli (1655-1705).
By Niklaus Bernoulli, Public Domain,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=266673

Processo de Bernoulli – exemplos

- Lançar moedas
- Apostar na Mega-Sena toda semana
- Disputar uma sequência de pontos de pingue-pongue
- Apostador jogar algumas rodadas do seu jogo
- Boa aproximação para **chegadas**:
  - Chegada (a cada minuto) de voos a um aeroporto
  - Processos (a cada determinado intervalo de tempo) a um servidor, etc.

Probabilidade e número esperado de sucessos

- Qual a probabilidade, $P(k, n)$, de ocorrerem k sucessos/chegadas em n experimentos?
- Ex.: dada uma moeda (justa ou não), qual a probabilidade de que em quatro lançamentos, ocorram exatamente duas caras (C)?
  - **Espaço amostral:** $\Omega = \{$CCCC, CCCK, CCKC, **CCKK**, CKCC, **CKCK**, **CKKC**, CKKK, KCCC, **KCCK**, **KCKC**, KCKK, **KKCC**, KKCK, KKKC, KKKK$\}$
  - Neste caso, $n = 4$ e $k = 2$. Se cada um dos 16 resultados tem mesma chance de ocorrer (moeda justa), temos $P(2, 4) = 6/16$.
  - **Numerador:** valor 6 corresponde ao **binômio de Newton** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, para $n = 4$ e $k = 2$, que corresponde ao número de maneiras (**combinações**) de se obter $k = 2$ sucessos em $n = 4$ experimentos:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot 2!} = 6$$

Probabilidade e número esperado de sucessos

- **Caso geral:** seja S o **número de sucessos em n experimentos**, definido como

$$S = X_1 + \cdots + X_n, \quad \text{onde } X_i = \begin{cases} 1 & \text{se sucesso, ou} \\ 0 & \text{se falha} \end{cases}, i = 1, \ldots, n$$

- Dado que $P(X_i = 1) = p$, $i = 1, \ldots, n$, então $P(k, n)$ é dada por

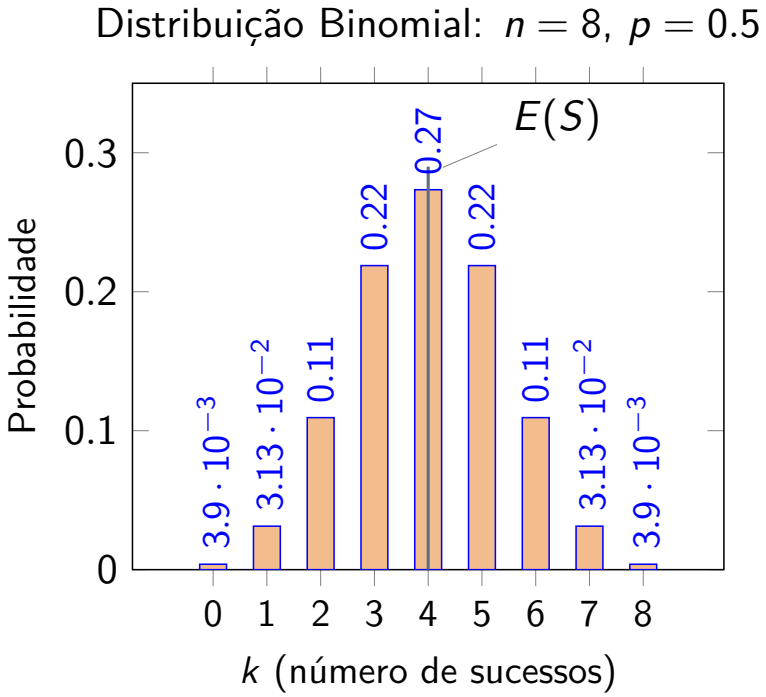
$$P(k, n) \equiv P(S = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

(**distribuição binomial** com probabilidade p).

- O **número esperado de sucessos** em n experimentos é dado por:

$$E(S) = np\,.$$

Exemplo



- Voltando ao exemplo do lançamento da moeda visto (duas caras em quatro lançamentos):
- Se a moeda é justa – $P(X_i = 1) = 1/2$, $i = 1, \ldots, 4$, em que o sucesso é a ocorrência de "cara" – vimos que $P(2, 4) = 6/16$.
- Usando-se a fórmula geral:

$$
\begin{aligned}
P(2,4) = P(S=2) &= \binom{4}{2} p^2 (1-p)^{4-2} \\
&= 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{16} = 0,375\,,
\end{aligned}
$$

ou seja, o número total de combinações possíveis (16) corresponde ao **denominador** da fração, e é estimado em termos da chance de sucesso.

- Num caso mais geral, onde a probabilidade de ocorrência de "cara" é maior ou menor que $1/2$, $P(S = 2)$ varia.
- Exemplo, se a chance de cara é $p = 0,7$:

$$P(2,4) = \binom{4}{2} (0,7)^2 (0,3)^2 = 6 \cdot 0,49 \cdot 0,09 \approx 0,265\,.$$

- Ainda, considerando-se ambos os casos (moeda justa e com chance de cara $p = 0,7$), temos, como número esperado de caras, nos quatro lançamentos,

$$E(S) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2\,, \qquad E(S) = 4 \cdot 0,7 = 2,8\,,$$

respectivamente.

Tempo esperado até o primeiro sucesso

- Seja $T_1 = \min\{i; X_i = 1\}$. Então, a probabilidade de que o **primeiro sucesso** ocorra somente no k-ésimo experimento é:

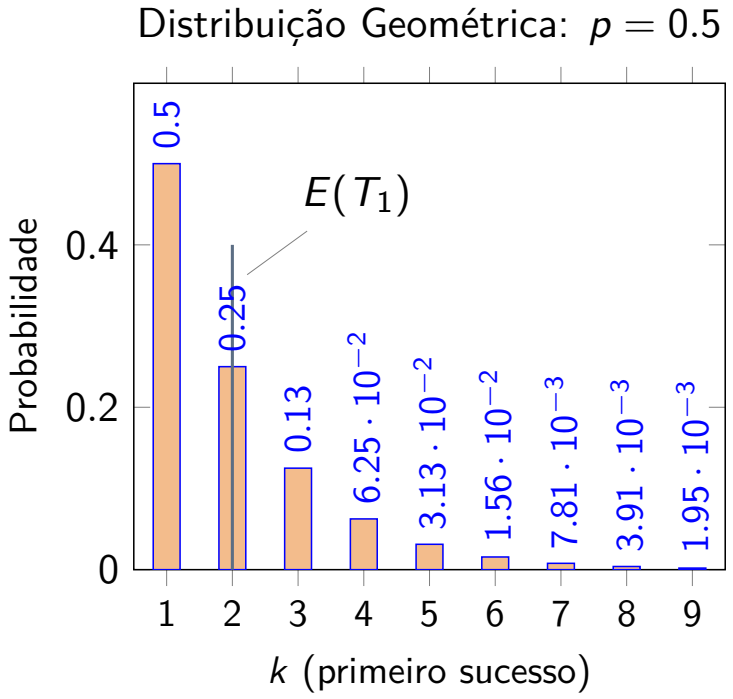
$$P(T_1 = k) = P(\underbrace{X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_{k-1} = 0}_{k-1 \text{ falhas}}, X_k = 1)$$
$$= (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, \ldots, n$$

(**distribuição geométrica** com probabilidade p)

- O **tempo esperado** até o primeiro sucesso, então, é dado por

$$E(T_1) = \frac{1}{p}\,.$$

Exemplo



Exemplo

(CLARKE; DISNEY, 1985) Sabe-se que 8,1% das chamadas a uma central telefônica da polícia são para solicitar atendimento médico (ambulância). Tal informação é de extrema importância, pois permite estimar quantos veículos precisam ser disponibilizados à população, com base na quantidade de chamadas recebidas.

1. A cada quantas chamadas em média se espera receber uma solicitação do tipo?
   - Neste caso, basta estimar o tempo decorrido até uma chamada:

$$E(T_1) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,081} \approx 12,346\,.$$

2. Em dias atípicos, três de cada dez chamadas são solicitando ambulância. Quantas vezes por ano isto ocorre, em média?
   - Neste caso, temos que calcular $P(3, 10)$:

$$P(3,10) = \binom{10}{3}(0,081)^3 \cdot (\underbrace{0,919}_{1-0,081})^7$$
$$\approx 120 \cdot 5,314 \times 10^{-4} \cdot 0,554 \approx 0,036\,.$$

Logo, a cada ano, espera-se a ocorrência de aproximadamente 13 dias atípicos $(0,036 \times 365)$.

3. É possível representar o processo como uma cadeia de Markov?
   - Além de os eventos (as chamadas telefônicas) serem independentes entre si, para qualquer chamada i, temos que $X_i = 1$ com probabilidade $p = 0,081$; e $X_i = 0$ com probabilidade $q = 1 - p = 0,919$. Logo:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,919 & 0,081 \\ 0,919 & 0,081 \end{bmatrix} \end{array}.$$

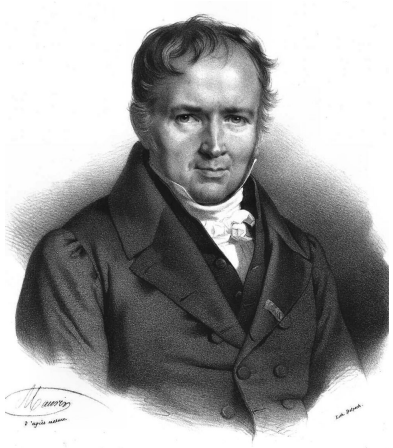
O que se pode dizer sobre tal matriz? (por exemplo, qual o valor de P^m, para um m qualquer?).

Sumário

1. Processos de Poisson
   - Introdução
   - Processo de Bernoulli
     - Definições básicas e exemplos
     - Probabilidade e número esperado de sucessos
     - Tempo esperado até o primeiro sucesso
   - Processo de Poisson
     - Definições básicas e exemplos
     - Contagem
     - Probabilidade e número esperado de eventos
     - Tempos de espera até o primeiro e demais eventos
     - Outras propriedades

Processo de Poisson

- E se quisermos modelar não pontos em um jogo de pingue-pongue, mas **gols em um jogo de futebol**?
- Qual o **intervalo de tempo**? Tamanho do passo?
- Considerações-chave (as mesmas de Bernoulli):
  1. Experimentos independentes.
  2. *A priori*, homogêneos ao longo do tempo (p não varia).



Simeón Denis Poisson (1781-1840). Basel Historical MuseumLink, Domínio público, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=536305

Processo de Poisson – exemplos

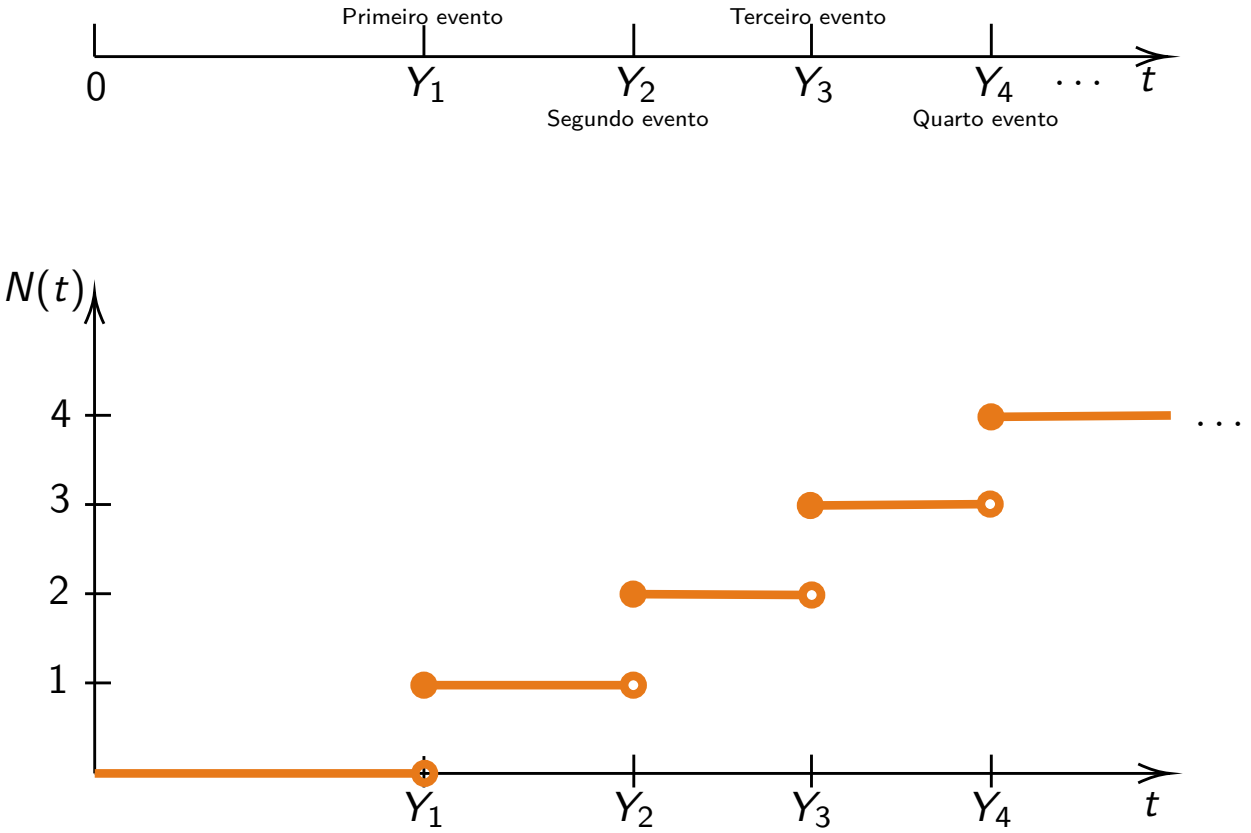
- Emissão de partículas em decaimento radioativo
- Acesso de clientes ao *website* de um *e-commerce*
- Crises no mercado financeiro – é possível prever quando será a próxima?
- Número de dardos em cada região do alvo (homogêneo no espaço?)

Domínio público, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3522690

Contagem

- Um processo $N(t)$, $t \geq 0$ é um **processo de contagem** se $N(t)$ representa **o número de eventos** no intervalo $[0, t)$ e satisfaz:
  1. $N(0) = 0$
  2. $N(t) \in \mathbb{N}$, i.e. $N(t) = 0, 1, 2, \ldots$
  3. Se $s < t$, então $N(s) \leq N(t)$
  4. Se $s < t$, então $N(t) - N(s)$ corresponde ao número de eventos no intervalo $(s, t]$.

Exemplo



Eventos independentes e estacionários

- O processo de contagem tem **incrementos independentes** se o número de eventos ocorrendo em intervalos disjuntos são independentes entre si, i.e., para $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, as vs.as.

$$N(t_2) - N(t_1),\ N(t_3) - N(t_2),\ \ldots,\ N(t_n) - N(t_{n-1})$$

  são independentes.
- Além disso, os incrementos são **estacionários** se a distribuição de probabilidade do número de eventos em qualquer intervalo é a mesma e depende apenas do **comprimento do intervalo**.

Processo de Poisson

- Um processo de contagem $N(t)$, $t \geq 0$ é um **processo de Poisson** com **taxa de ocorrência de eventos** $\lambda > 0$ se:
  1. $N(0) = 0$
  2. O processo tem incrementos independentes
  3. O número de eventos em qualquer intervalo de comprimento t segue uma **distribuição de Poisson** com média λt (veja a seguir).

Intervalos pequenos

- **Exemplo:** num jogo de futebol, podemos ter dois gols ao mesmo tempo?
  - Mais uma consideração: **probabilidade para intervalos pequenos (δ)**
- Quando $\delta \approx 0$, se $\lambda > 0$ é a taxa de ocorrência (ex.: média de gols num jogo de futebol):

$$P(N(\delta) = k) \approx \begin{cases} 1 - \lambda\delta & \text{se } k = 0\,, \\ \lambda\delta & \text{se } k = 1\,, \\ 0 & \text{se } k \geq 2, \end{cases} \tag{1}$$

a menos de termos $O(\delta)$.

Caso geral – tamanho t não é pequeno

Qual a probabilidade de ocorrência de k eventos até o tempo t? I.e., $P(N(t) = k)$?

- **Abordagem por Bernoulli**: divide-se $[0, t]$ em n subintervalos de tamanho infinitesimal δ, tal que $\delta \equiv t/n$.
- Então, considerando-se a Eq. (1), em cada subintervalo a chance de um evento é dada por $\lambda\delta$ e, portanto,

$$P(N(t) = k) \approx P(k \text{ de } n \text{ subintervalos tenham um evento}).$$

- Por Bernoulli, considerando-se $p = \lambda\delta = \lambda t/n$,

$$P(N(t) = k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \quad (2)$$

- Quando $\delta \to 0$, $n \to \infty$. Assim, em (2):
  - No caso do binômio, considerando-se que $n - k \to n$:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{n(n-1)\ldots(n-k+1)}^{k \text{ termos}} \cancel{(n-k)!}}{k!\cancel{(n-k)!}} = \frac{n^k}{k!}$$

  - Logo, $\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \to \frac{(\lambda t)^k}{k!}$.
  - Novamente se considerando que $n - k \to n$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

- Portanto,

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k \mathrm{e}^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

ou seja, $P(N(t) = k) \sim \text{Pois}(\lambda t)$ (**distribuição de Poisson**)

- É possível verificar que o número esperado de eventos é dado por:

$$E(N(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k \mathrm{e}^{-\lambda t}}{k!} = \lambda t\,.$$

  - Resultado equivalente ao número esperado de sucessos em Bernoulli, $E(S) = np$. Da abordagem por subintervalos, $p = \lambda t/n$. Portanto, $np \equiv \lambda t$.
- Note ainda que, devido aos incrementos serem estacionários, a probabilidade só depende do tamanho do intervalo, i.e.

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = P\left(N(t) = k\right) = \frac{(\lambda t)^k \mathrm{e}^{-\lambda t}}{k!}\,.$$

Exemplo 1

Você recebe e-mails a uma taxa de $\lambda = 5$ e-mails por hora.

1. Qual a média de e-mails recebidos por dia?
2. Qual é P(1 e-mail na próxima hora)?
3. Qual é P(2 e-mails na próxima hora)?
4. Qual é P(5 e-mails nas próximas duas horas)?

Exemplo 2

Suponha que clientes ligam para um *call center* com taxa de chegada de 2 chamadas por minuto. Seja $N(t)$ o número de chamadas que chegam até o tempo t.
Responda:

1. $P(N(1) = 2)$
2. $P(N(1) > 2)$
3. $P(N(1) = 2, N(3) = 6)$
4. $P(N(1) = 2 | N(3) = 6)$
5. $P(N(3) = 6 | N(1) = 2)$

Tempo médio de espera

Seja T_1 o intervalo de tempo até o primeiro evento. Ou seja, $T_1 = \min\{t \geq 0 | N(t) = 1\}$.

- Primeiro, calcula-se $P(T_1 \leq t)$ (**função densidade cumulativa**):

$$P(T_1 \leq t) = 1 - P(T_1 > t)\,.$$

- Observa-se que

$$P(T_1 > t) = P(\text{nenhum evento no intervalo } [0, t]) = P(N(t) = 0)\,.$$

- Agora, basta substituir $P(N(t) = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ na equação:

$$P(T_1 \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\,.$$

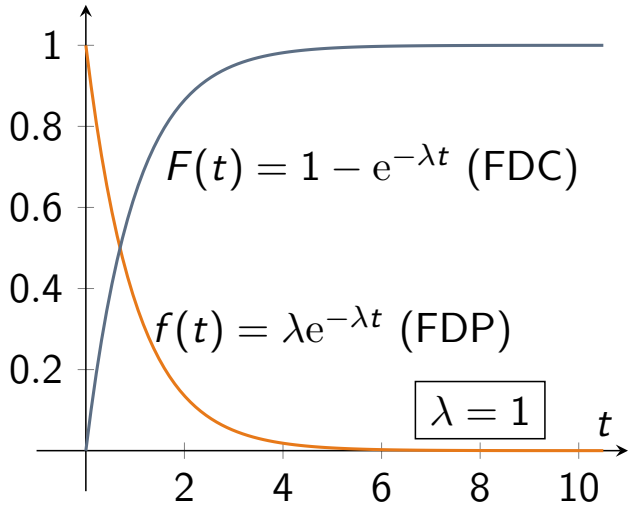
Tempo de espera até o primeiro evento

- Como calcular o tempo de espera para o primeiro evento?
- Para calcular a função de distribuição de probabilidade (para $T_1 = t$), calcula-se a **derivada da cumulativa**. Veja que isso é o mesmo que considerar $k = 1$ na fórmula de $P(N(t) = k)$.

$$f_{T_1}(t) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

  Isto é, $T_1 \sim \text{Exponencial}(\lambda)$.
- Logo, o tempo médio de espera é dado por

$$E(T_1) = \frac{1}{\lambda}.$$



Falta de memória

- Uma propriedade importante da distribuição exponencial é **falta de memória** (propriedade markoviana).
  - Para calcular a probabilidade de ocorrência de um tempo t à frente, o passado não importa.
  - Logo,

$$P(T_1 > t + s | T_1 > s) = P(T_1 > t)\,.$$

- Relacionado com o requisito de independência (intervalos disjuntos) do processo de contagem.
- (Análogo no processo de Bernoulli? Ex.: para calcular quanto tempo até a próxima cara, não importa quantas caras já tenham saído)
- Permite a **simulação do processo** a partir do sorteio dos intervalos de tempo entre eventos.

Tempo de espera entre eventos

- Seja T_2 o tempo de espera entre o primeiro e segundo eventos. Então:

$$\begin{aligned} P(T_2 > t | T_1 = s) &= P(\text{nenhum evento em } (s, t+s] | T_1 = s) \\ &= P(\text{nenhum evento em } (s, t+s]) \\ &= P(N(t) = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,. \end{aligned}$$

- Logo, $P(T_2 \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ e, portanto, $T_2 \sim \text{Exponencial}(\lambda)$. Ainda, $E(T_2) = \dfrac{1}{\lambda}$.
- Por indução, se T_n é o tempo de espera entre o $(n-1)$-ésimo e o n-ésimo evento, então $T_n \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, e o tempo médio será também $E(T_n) = \dfrac{1}{\lambda}$.
- E $T_1, T_2, \ldots, T_n$ são variáveis aleatórias **independentes e identicamente distribuídas**.

Tempo esperado até o k-ésimo evento

- Seja agora Y_k o instante em que ocorre o k-ésimo evento. Então,

$$\begin{cases} Y_k &= T_1 + T_2 + \cdots + T_k\,, \\ Y_1 &= T_1\,, \end{cases}$$

  i.e., $T_k = Y_k - Y_{k-1}$, $k > 1$. Y_k é uma soma de variáveis i. i. d., cada uma com esperança $1/\lambda$. Portanto, o **tempo esperado** até o k-ésimo evento é

$$E(Y_k) = E(T_1) + \cdots + E(T_k) = \frac{1}{\lambda} + \cdots + \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{\lambda}\,.$$

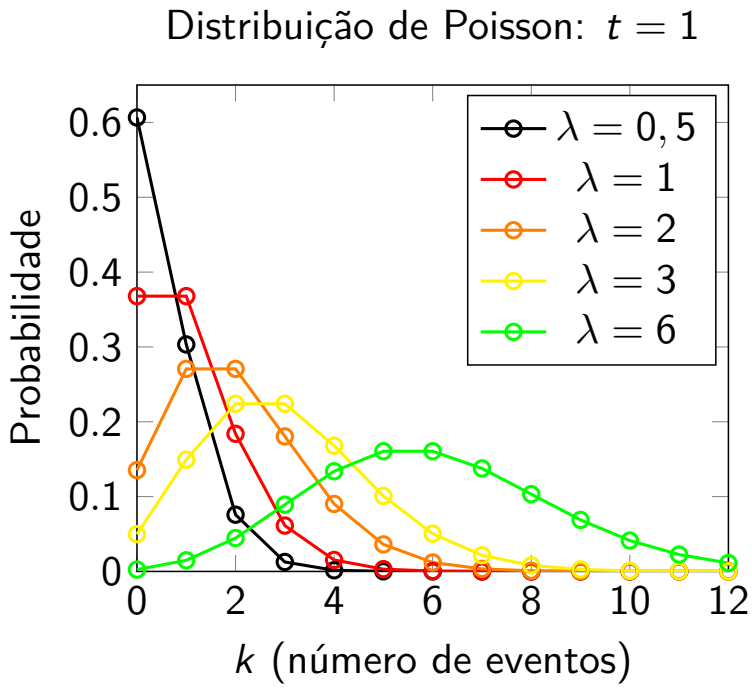
- É possível mostrar que o tempo até o k-ésimo evento segue a **Distribuição de Erlang**:

$$f_{Y_k}(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1} \mathrm{e}^{-\lambda t}}{(k-1)!}\; t \geq 0.$$

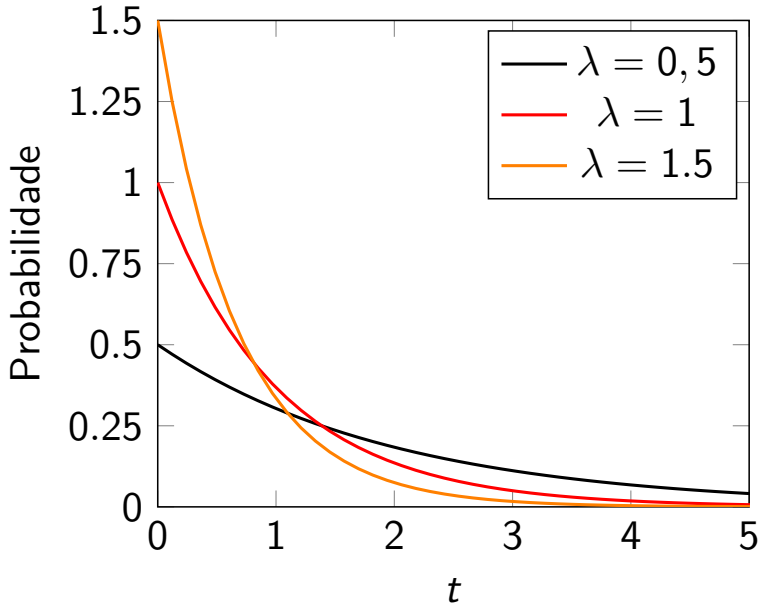
Notação

Um jeito de resumir a notação é se referir ao processo de Poisson com taxa de chegada λ por unidade de tempo (isto é, considerando-se $t = 1$) como Poisson(λ) ou Pois(λ).
Chamamos isso de **processo de Poisson com parâmetro λ**.

Distribuição de Poisson ($k \times$ probabilidade)



Distribuição Exponencial (Tempo até evento $\times$ probabilidade)



Exemplo 3

Você foi pescar. A taxa de chegada de peixes é 0,6/hora. Você pesca por 2h, e em seguida toma uma decisão:

- Se você pegou pelo menos um peixe, você pára;
- se não, você continua até pegar o primeiro peixe.

1. Qual a probabilidade de que você pesca por mais de 2h?
2. Qual a probabilidade de que você pesca por mais de 2h e menos de 5h?
3. Qual a chance de que você pegou pelo menos dois peixes?
4. Qual o tempo futuro de pesca dado que você já pescou 3h?
5. Qual o tempo esperado de pesca?
6. Qual o número esperado de peixes?

Exemplo 4

Suponha que o tempo gasto por uma pessoa numa fila de um banco é uma v. a. com distribuição exponencial com valor esperado igual a dez minutos.

1. Qual é a probabilidade de que uma pessoa gastará quinze minutos no banco?
2. Qual é a probabilidade de que uma pessoa gastará mais do que 15 minutos, dado que ela está no banco há dez minutos?

Exemplo 5

Numa pesca com taxa de chegada de peixes de $1/\text{h}$, qual a probabilidade de pescar dois peixes no intervalo $[0, 3]$ e quatro peixes no intervalo $[2, 4]$?

Exemplo 6

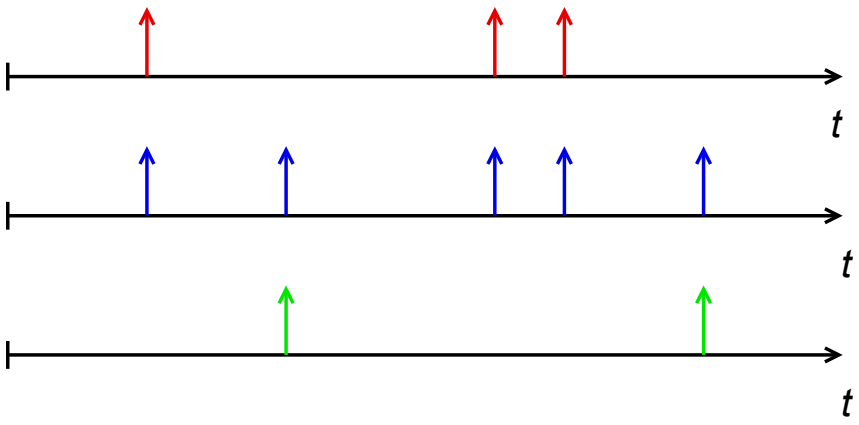
Um médico tem duas consultas marcadas: uma às 8h e outra às 8h30. O tempo gasto em cada consulta tem distribuição exponencial (é um processo de Poisson) com média de 30 minutos. Assumindo que ambos os pacientes chegaram no horário marcado, encontre o tempo médio que o paciente marcado às 8h30 fica no consultório.

Propriedade da soma

A soma de duas variáveis aleatórias independentes de Poisson, Poisson(μ) e Poisson(ν), é uma variável aleatória que também segue Poisson, com distribuição Poisson($\mu + \nu$).
A maioria das demais distribuições não têm essa propriedade – outra exceção: normal!

- Ex.: um processo de Poisson com taxa λ e dois intervalos disjuntos e consecutivos com tamanhos $\mu \equiv \lambda t_1$ e $\nu \equiv \lambda t_2$, onde os números de eventos M e N em cada intervalo são vs. as. onde $M \sim Poisson(\mu)$ e $N \sim Poisson(\nu)$.

Mesclagem de dois processos de Poisson com taxas λ_1 e λ_2



Em um processo de Poisson que é a mesclagem de outros dois, A e B com taxas λ_1 e λ_2, a qual processo pertence um dado evento?

Em um processo de Poisson que é a mesclagem de outros dois, a qual processo pertence um dado evento?
Veja as possibilidades – a menos de termos $O(\delta^2)$:

	$A \rightarrow$	$P(N(\delta)=0)$	$P(N(\delta)=1)$
$B \downarrow$		$1-\lambda_1\delta$	$\lambda_1\delta$
$P(N(\delta)=0)$	$1-\lambda_2\delta$	$1-(\lambda_1+\lambda_2)\delta$	$\lambda_1\delta$
$P(N(\delta)=1)$	$\lambda_2\delta$	$\lambda_2\delta$	$O(\delta^2)$

Dados processos Poisson A e B com taxas de chegada λ_1 e λ_2:

- Ex.: Qual a probabilidade de quatro em dez chegadas serem do processo A?
- Fixo em dez chegadas, é possível tratar como discreto e usar **Bernoulli**:

$$P(\text{quatro em dez chegadas serem do processo A}) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^4 \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^6 .$$

Divisão de um processo de Poisson com taxa λ

- Outra forma de raciocinar é imaginar um único processo de Poisson, onde as chegadas podem ser do tipo 1 ou 2.
- **Exemplo**: homens e mulheres chegando numa loja com taxa de chegada λ. Se a chance de uma pessoa que entra na loja ser mulher é p, a taxa de chegada de mulheres será λp, ao passo que a de homens será $\lambda(1-p)$.

Exercício

Se Uberlândia recebe novos moradores num processo de Poisson com taxa de dez por semana, e se cada novo morador é paulista com probabilidade 1/12, qual a probabilidade de que nenhum paulista imigrará para Uberlândia no mês de fevereiro?

Exercício

O rei Salomão bebe em média três taças de vinho por dia. Assassinos querem colocar veneno na taça do rei. Há uma chance de 2% de que uma taça contenha um veneno letal. Assuma que a ocorrência de veneno em uma taça e o número de taças bebidas por dia são variáveis aleatórias independentes.
Calcule a probabilidade:

1. de o rei viver ao menos trinta dias;
2. de o rei morrer antes de noventa dias.

Paradoxo da incidência aleatória

- Considere como exemplo um ponto de ônibus onde as chegadas de cada veículo seguem um processo de Poisson, com taxa de chegada $\lambda = 4/\text{h}$.
  - Tempo esperado até o embarque: $E(T_k) = (1/4)\text{h} = 15$ minutos.
- Queremos averiguar se a companhia de ônibus está sendo honesta. Então, todos os dias, chegamos num certo horário, t^*, e medimos o tempo $L \equiv V - U$ entre a última chegada (U) e a próxima (V). Qual o resultado?
- Nossa chegada no instante t^* é uma **incidência aleatória** dentro do processo.
- Vamos simular?

- O que houve? A companhia de ônibus mentiu?
- Analisando-se o intervalo $[U, V]$ e o tempo esperado até o embarque, $E(V - U)$:

$$E(V - U) = E(V - t^*) + E(t^* - U) = 1/\lambda + 1/\lambda\,.$$

- Como isto é possível?

- Atenção à estratégia de amostragem!
- Mais um exemplo...

  Queremos fazer um censo do tamanho de famílias numa população.

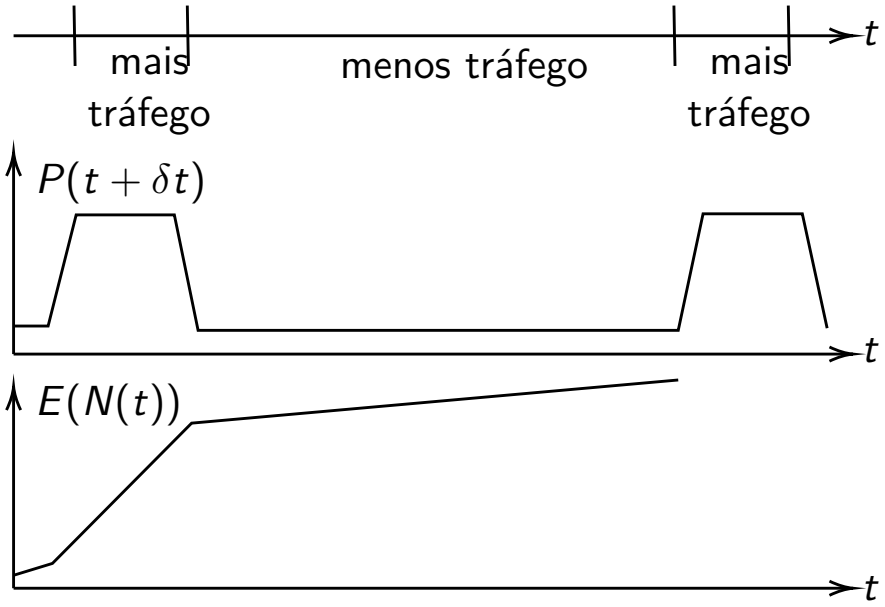
  1. Escolhemos uma família aleatoriamente, e olhamos o tamanho.
  2. Escolhemos uma pessoa aleatoriamente, e olhamos o tamanho da família.

Poisson não-homogêneo

- Probabilidade dos eventos muda: i.e. a restrição inicial de que probabilidades não mudam com o tempo não mais se aplica.
- Porém, permanece a propriedade markoviana: eventos passados não afetam os futuros.

Poisson não-homogêneo – Exemplo

Carros em uma estrada:



Poisson não-homogêneo – Exemplo

Reclamações chegam a uma empresa, num dado mês, de acordo com um processo de Poisson não-homogêneo. A intensidade $\lambda(t)$ representa o número de reclamações por dia e varia de acordo com t, o número de dias em um mês (trinta). Qual a probabilidade de termos menos de duas reclamações?

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0,1\,, & \text{se } 0 \leq t < 8\,, \\ 0,05t\,, & \text{se } 8 \leq t < 15\,, \\ 0,02\,, & \text{se } 15 \leq t < 30\,. \end{cases}$$

Referências

1. CLARKE, A. B., DISNEY, R. L. *Probability and Random Processes: A First Course with Applications*, 2. ed. (Wiley Series in Probability and Statistics), 1985.
2. ROSS, S. *Introduction to Probability Models*, 13. ed. (Academic Press), 2024.
3. TSITSIKLIS, J., JAILLET, P. *Introduction to Probability, Part III: Random Processes*, (MIT OpenCourseWare) https://ocw.mit.edu/courses/res-6-012-introduction-to-probability-spring-2018/
4. https://www.probabilitycourse.com/

Os materiais de parte desta seção foram gentilmente cedidos por Leandro N. Couto (FACOM/UFU).
Adaptações: Renato Pimentel, FACOM/UFU