Cadeias de Markov contínuas

Prof. Renato Pimentel

2025/2

Sumário

1. Cadeia de Markov contínua
   - Introdução
   - Probabilidades de transição
   - Distribuições estacionária e limitante
   - Propriedades
   - Matriz geradora ou matriz de taxas de transição
   - Exercícios

Cadeia de Markov contínua

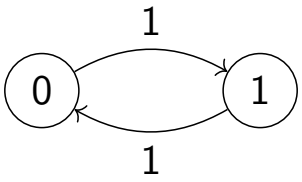
Imagine uma cadeia de Markov onde ao invés de probabilidades de transição a cada passo, tem-se uma **probabilidade de mudança** em função do tempo.

Exemplo

Uma lâmpada com defeito que oscila entre acesa/apagada.

- Cada mudança corresponde a um evento de um processo de Poisson.

- Como fica a matriz de transição no **caso discreto**?



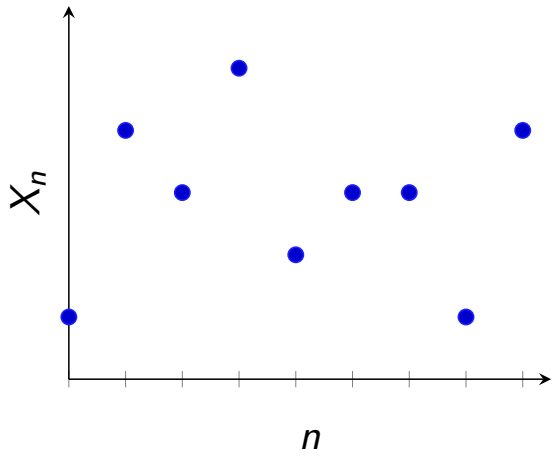
  - Temos:

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

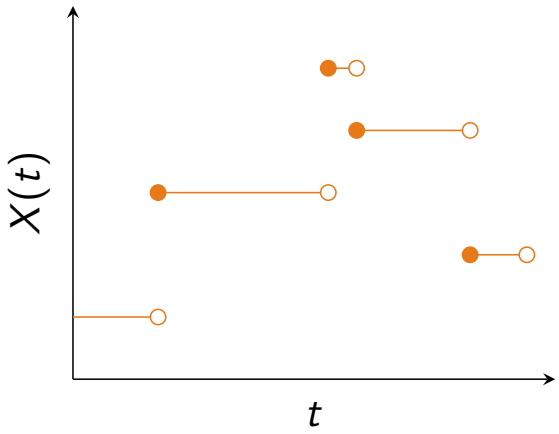
- É um resultado pouco útil! É preciso considerar o tempo t no caso contínuo.

Comparativo discreto × contínuo

Cadeia de Markov discreta



Caadeia de Markov contínua



Sumário

1 Cadeia de Markov contínua
- Introdução
- Probabilidades de transição
- Distribuições estacionária e limitante
- Propriedades
- Matriz geradora ou matriz de taxas de transição
- Exercícios

Probabilidade de transição

- Como ficam as probabilidades de transição no caso da lâmpada?
- Se $X(t), t \in [0, \infty)$ é a variável aleatória que representa o estado da cadeia:

$$p_{ij}(t) = P(X(t+s) = j | X(s) = i)$$

Lembrando que o processo é sem memória, então:

$$p_{ij}(t) = P(X(t) = j | X(0) = i), \quad \forall s, t \in [0, \infty)$$

Matriz de transição

Definimos a matriz de transição $\boldsymbol{P}(t)$ para o caso contínuo, supondo-se r estados $0, 1, \ldots, r-1$, como:

$$\boldsymbol{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & \cdots & p_{0,r-1}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & \cdots & p_{2,r-1}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r-1,0}(t) & p_{r-1,1}(t) & \cdots & p_{r-1,r-1}(t) \end{bmatrix}$$

- Podemos calcular a matriz $\boldsymbol{P}(t)$ para o caso da lâmpada, sabendo que cada mudança segue um processo de Poisson com parâmetro λ (em outras palavras, o tempo entre cada transição é uma variável aleatória Exponencial(λ))?
- Considere para fins de exemplo que λ é o mesmo para passar de aceso para apagado, e vice-versa.

Como calcular tal probabilidade?

$$p_{00}(t) = P(X(t) = 0 | X(0) = 0)$$

- Temos que

$$\begin{aligned} p_{00}(t) &= P(X(t) = 0 | X(0) = 0) \\ &= P(\text{número par de mudanças em } [0, t]) \,. \end{aligned}$$

- Logo,

$$\begin{aligned} p_{00}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda t} \left(\frac{\mathrm{e}^{\lambda t} + \mathrm{e}^{-\lambda t}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-2\lambda t} \,. \end{aligned}$$

- E $p_{01}(t)$?
- Neste caso, o número de transições no intervalo $[0, t]$ é **ímpar**:

$$p_{01}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \,.$$

- Embora a série infinita seja conhecida acima, é mais fácil considerar, neste caso, que $p_{01}(t) = 1 - p_{00}(t)$. Logo,

$$\begin{aligned} p_{01}(t) &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda t}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\lambda t} \,. \end{aligned}$$

- Como $p_{11}(t) \equiv p_{00}(t)$, e $p_{10}(t) \equiv p_{01}(t)$:

$$\boldsymbol{P}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\lambda t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\lambda t} \end{bmatrix} \,.$$

- O que acontece com $\boldsymbol{P}(t)$ quando $t = 0$? E quando t tende ao infinito?
- O que esses resultados significam?

- Quando $t = 0$, temos $P(0)$:
  - $P_{ii}(0) = P(X(0) = i | X(0) = i) = 1,$ para todo i.
  - $P_{ij}(0) = P(X(0) = j | X(0) = i) = 0,$ para todo $j \neq i$.
- Ou seja,

$$\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sumário

1. Cadeia de Markov contínua
   - Introdução
   - Probabilidades de transição
   - Distribuições estacionária e limitante
   - Propriedades
   - Matriz geradora ou matriz de taxas de transição
   - Exercícios

Estado estacionário

- Quando t tende ao infinito, temos a **distribuição estacionária** ou **estado de equilíbrio**:

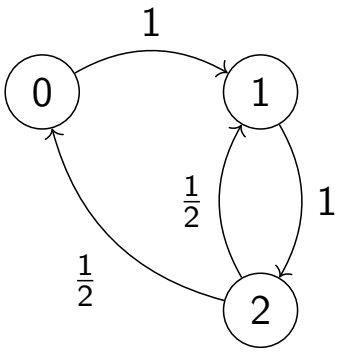
$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

- Assim como no caso discreto, $\boldsymbol{\pi} = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{r-1}]$ é a **distribuição estacionária** da cadeia de Markov com matriz de transição $\boldsymbol{P}(t)$ se $\sum_i \pi_i = 1$, com $\pi_i \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots, r-1$, e:

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}(t), \quad t \geq 0\,.$$

  - Note que os elementos de $\boldsymbol{\pi}$ estão no intervalo $[0, 1]$ e devem somar 1.

- **Exemplo:** encontre a distribuição estacionária para a cadeia de Markov dada (a princípio, pense em termos discretos, considerando que os valores das arestas são as probabilidades de transição)



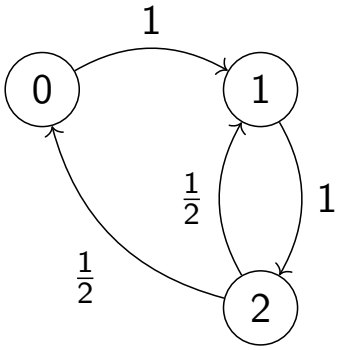
  - Se os valores de λ são iguais, temos a mesma distribuição estacionária que no caso discreto: **a fração do tempo em que o sistema permanece num estado i é equivalente à frequência com que i é visitado**.
  - E se os valores de λ são **diferentes**?

Distribuição limitante

- E no caso contínuo? Se quisermos saber, para um t muito grande, em que posição da cadeia estaremos?
- Intuição:
  1. A distribuição estacionária $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ do caso discreto indica com qual frequência se visita cada estado (por exemplo, $\tilde{\pi}_j$ é a frequência de visitação a j).
  2. Quando se está em j, permanece-se no mesmo por um tempo médio $1/\lambda_j$.
  3. Assim, para se saber no limite a fração de tempo em j, basta calcular o produto $\tilde{\pi}_j \cdot (1/\lambda_j)$.
  4. Para uma distribuição válida, é preciso normalizar o resultado acima, dividindo-o por $\sum_{k=0}^{r-1} \tilde{\pi}_k/\lambda_k$:

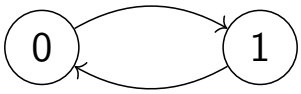
$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} P(X(t) = j | X(0) = i) = \frac{\frac{\tilde{\pi}_j}{\lambda_j}}{\sum_{k=0}^{r-1} \frac{\tilde{\pi}_k}{\lambda_k}} .$$

Exemplo: Encontre a distribuição limitante da cadeia vista, considerando-se $\lambda_0 = 2$, $\lambda_1 = 1$, e $\lambda_2 = 3$.



Simulação

Use Monte Carlo para estimar a distribuição estacionária e limitante na cadeia de Markov abaixo. Considere diferentes valores de λ_0 e λ_1. O que se espera quando ambos são iguais entre si?



Sumário

1 Cadeia de Markov contínua
- Introdução
- Probabilidades de transição
- Distribuições estacionária e limitante
- Propriedades
- Matriz geradora ou matriz de taxas de transição
- Exercícios

Propriedades

- **Tempos de transição exponenciais**: Como visto acima, em tempo contínuo é importante considerar o tempo T_k, tempo em que $X(t)$ permanece no estado k. Lembrando de Poisson, temos

$$E(T_k) = \frac{1}{\lambda_k}\,.$$

- **Chapman-Kolmogorov**: Tal como no caso discreto, onde vimos que a probabilidade de se visitar um estado j, a partir de um estado i após n passos, é dada pela n-ésima potência da matriz de transição $\boldsymbol{P}$, e que $\boldsymbol{P}^{n+m} = \boldsymbol{P}^n \boldsymbol{P}^m$, no caso contínuo temos que

$$\boldsymbol{P}(s+t) = \boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{P}(t)\,, \quad \forall s, t \geq 0\,.$$

Sumário

1. Cadeia de Markov contínua
   - Introdução
   - Probabilidades de transição
   - Distribuições estacionária e limitante
   - Propriedades
   - Matriz geradora ou matriz de taxas de transição
   - Exercícios

Matriz geradora ou matriz de taxas de transição

- Uma forma alternativa de se analisar cadeias de Markov contínuas no tempo é a **matriz geradora** (geralmente denotada pela letra $\boldsymbol{G}$ ou $\boldsymbol{Q}$). Ela considera as probabilidades de transição para um tempo infinitesimal δ.
- **Lembrando:** No processo de Poisson, podemos ignorar a probabilidade de número de transições $P(N(\delta) > 1)$ para um intervalo de tempo δ pequeno o bastante.

$$P(N(\delta) = k) \approx \begin{cases} 1 - \lambda\delta & \text{se } k = 0\,, \\ \lambda\delta & \text{se } k = 1\,, \\ 0 & \text{se } k \geq 2, \end{cases}$$

- Considere a cadeia $\{X(t), t \geq 0\}$. Assuma $X(0) = i$. Considerando que um evento no processo de Poisson é uma transição na cadeia, a probabilidade de uma transição no intervalo δ é dada por $P(1, \delta) = \lambda_i \delta$.
  - λ_i é a **taxa de saída** do estado i.
- Dada a probabilidade de transição de i para j, definimos $g_{ij} = \lambda_i \cdot p_{ij}$ como a **taxa de transição de i para j**.
- Na cadeia de Markov contínua não temos **autotransições** (transições de i para i). Definimos g_{ii} de forma que a soma das entradas de cada linha de $\boldsymbol{G}$ seja nula: $g_{ii} \equiv -\lambda_i$.
- Logo,

$$g_{ij} = \begin{cases} \lambda_i p_{ij}\,, & \text{se } i \neq j\,; \\ -\lambda_i\,, & \text{se } i = j\,. \end{cases} \tag{1}$$

Exemplo

- Considere o exemplo da lâmpada. A matriz de transição é:

$$\boldsymbol{P}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\lambda t} \\ \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\lambda t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2\lambda t} \end{bmatrix}$$

  Qual a matriz geradora $\boldsymbol{G}$? Considere que a matriz no caso discreto é dada por

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Temos que – aplicando-se (1):

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix}.$$

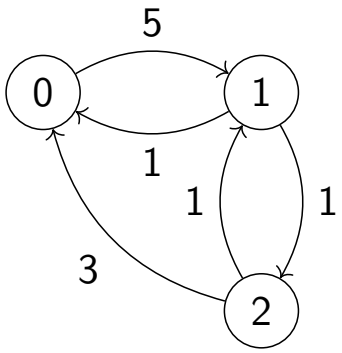
- Um dos usos da matriz geradora $\boldsymbol{G}$ é no cálculo da distribuição limitante. Para o vetor $\boldsymbol{\pi}$ ser distribuição limitante da cadeia de Markov: $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{0}$.
- **Exercício:** Encontre a distribuição limitante $\boldsymbol{\pi}$ para o exemplo com o método acima.

Diagrama da taxa de transição

Como a transição no caso contínuo depende tanto da probabilidade de transição quanto da taxa de transição, faz mais sentido colocar nas arestas os valores da matriz geradora (matriz de taxas de transição). Geralmente não colocamos os valores da diagonal principal.

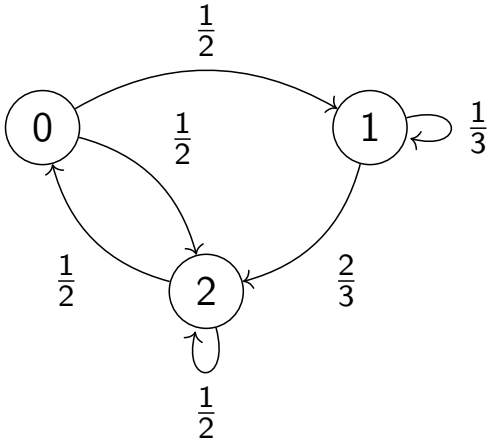
Exemplo:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$



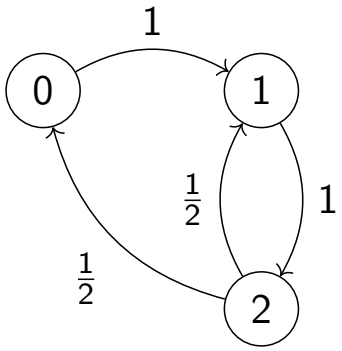
Exercício

- Calcule a distribuição estacionária $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ para o caso discreto.
- Assumindo $\lambda_0 = 2$, $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 4$, use $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ e calcule a distribuição limitante $\boldsymbol{\pi}$ para o caso contínuo $X(t)$.



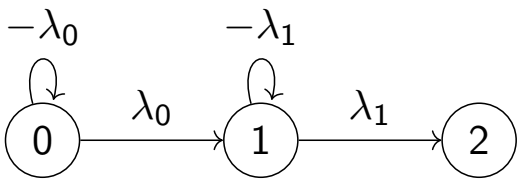
Exercício

- Considerando-se $\lambda_0 = 2$, $\lambda_1 = 1$, e $\lambda_2 = 3$, calcule a matriz geradora para a cadeia de Markov contínua ao lado.
- Encontre a distribuição limitante de $X(t)$ resolvendo $\boldsymbol{\pi G} = \mathbf{0}$.



Absorção

- **Probabilidade de absorção**:
  - Inalterada, em relação ao caso discreto.
- **Tempo médio para absorção**:
  - O tempo médio que passamos em cada estado j não é mais 1, é agora $1/\lambda_j$.



Exercício: Use Monte Carlo para estimar o tempo de absorção do estado 0 para o estado 2. Considere diferentes valores, tanto de λ_0 quanto de λ_1. O que se observa?

Sumário

1. Cadeia de Markov contínua
   - Introdução
   - Probabilidades de transição
   - Distribuições estacionária e limitante
   - Propriedades
   - Matriz geradora ou matriz de taxas de transição
   - Exercícios

Exercícios I

1. Um reparador cuida das máquinas 0 e 1. Cada vez que é reparada, a máquina i fica ativa por uma taxa λ_i (lembrando que $i = 0, 1$). Quando a máquina i quebra, ela requer um tempo exponencial com taxa μ_i para ser reparada. O reparador sempre prioriza a máquina 0. Por exemplo, se a máquina 0 falhar enquanto o reparador está reparando a 1, ele pára imediatamente de reparar a máquina 1 e começa a trabalhar na 0.
   1. Que proporção de tempo a máquina 1 fica quebrada?
   2. Assumindo que as duas máquinas estão funcionando em $t = 0$, qual o tempo médio até que as duas máquinas estejam simultaneamente quebradas pela primeira vez?

Exercícios II

2. Considere duas máquinas. Apenas uma está ligada em um dado momento, enquanto a outra fica de reserva. Ambas funcionam por um tempo exponencial com média dez dias até quebrarem. Quando uma quebra, ela vai para o reparador (que repara com tempo exponencialmente distribuído de média cinco dias), e a outra entra no lugar. Se o reparador estiver ocupado, uma máquina que chega para reparo tem que esperar o reparo da outra terminar, e quando isso acontece a máquina recém-reparada volta ao serviço e a outra começa o reparo.
   1. Quantos dias ao ano pelo menos uma máquina fica funcionando?
   2. E se adicionarmos um segundo reparador para quando as duas máquinas quebrarem, como fica a nova resposta do item anterior?

Exercícios III

3. Suponha que clientes chegam de acordo com um processo de Poisson com taxa $\lambda = 2/\text{h}$ em uma barbearia com apenas um barbeiro. Os clientes são atendidos um por vez em ordem de chegada. O tempo de serviço é distribuído exponencialmente com média $\mu = 3/\text{h}$. Após atendidos, os clientes saem do sistema. Modele o mesmo como uma cadeia de Markov em que os estados são o número de clientes na barbearia.
   1. Se a barbearia está vazia às 13h, qual é em média o tempo que o barbeiro precisa esperar até o próximo cliente?
   2. Suponha que estamos no estado $i > 0$. Qual o tempo esperado para a próxima transição?
   3. Suponha que um cliente B chega e há apenas outro cliente A na barbearia. Quanto tempo B deve esperar ficar no sistema?

Exercícios IV

4. (Teoria de filas) Considere um *spa* que consiste de duas cadeiras: uma de massagem (0), e uma de acupuntura (1).
   Suponha que um cliente que chega sempre vai à cadeira de massagem. Quando a massagem termina, ele vai para a cadeira de acupuntura se ela estiver vazia, ou espera na cadeira de massagem até que a cadeira de acupuntura fique livre. Suponha também que um cliente em potencial só entra no *spa* se a cadeira de massagem (0) estiver vazia. Se a chegada de clientes segue Poisson com taxa λ, e as duas cadeiras têm taxas de serviço distintas μ_0 e μ_1, responda:
   1. Qual a proporção de clientes que entra no *spa*?
   2. Qual a média de clientes dentro do *spa*?
   3. Qual o tempo médio que um cliente passa no *spa*?
   4. Qual é μ_b, a fração de clientes que tem que esperar entre a massagem e a acupuntura?

Processos como esse do exercício anterior são chamados de **processos de nascimento e morte**. Eles serão úteis quando discutirmos filas na próxima seção.

Referências

1. https://www.probabilitycourse.com/

Os materiais de parte desta seção foram gentilmente cedidos por Leandro N. Couto (FACOM/UFU).
Adaptações e LaTeXagem: Renato Pimentel, FACOM/UFU