Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Computação
GBC065 – Modelagem e Simulação
2025/2
Prof. Renato Pimentel

Lista de exercícios 1 – Probabilidade e cadeias de Markov discretas

1. Um dado é rolado duas vezes. Quais são os possíveis valores que as seguintes variáveis aleatórias podem assumir?

   (a) O maior valor que aparece nas duas rolagens;

   (b) O menor valor que aparece nas duas rolagens;

   (c) A soma das duas rolagens;

   (d) O valor da segunda rolagem menos o da primeira.

2. Considere uma moeda justa, i.e. as probabilidades de sair cara (C) e coroa (K) são as mesmas. Qual o número esperado de lançamentos até se obter duas caras consecutivas (CC)?

3. Para um dado de seis faces tradicional e justo – isto é, $P(X_i = k) = 1/6, \forall k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – calcule o número esperado de lançamentos até que ocorram dois valores consecutivos.

4. Uma moeda é jogada até cara (C) aparecer. Qual é o espaço amostral? Qual a probabilidade de que a moeda será jogada exatamente três vezes?

5. Dois dados são rolados. Qual a probabilidade de que pelo menos um deles seja 6? Considerando que as duas faces são diferentes, qual a probabilidade de uma delas ser 6?

6. Seja X_n a variável aleatória que define a qualidade do n-ésimo item de uma linha de produção, tal que:

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{se o produto está bom, e} \\ 1 & \text{se o produto está defeituoso.} \end{cases}$$

   Considere também a seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,99 & 0,01 \\ 0,12 & 0,88 \end{bmatrix} \end{array}$$

Qual a probabilidade de que o quarto item esteja defeituoso, dado que o primeiro também está?

7. Uma cadeia de Markov tem proabilidade de transição

$$\begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

Dado que a probabilidade dos estados iniciais é $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 1) = 0,5$, calcule $P\{X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0\}$.

8. Uma cadeia de Markov $\{X_n,\, n \geq 0\}$ com estados 0,1 e 2, tem a matriz de probabilidade de transição dada por

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Se $P(X_0 = 0) = P(X_0 = 1) = \frac{1}{4}$, calcule $E[X_3]$, ou seja, qual o estado esperado após $n = 3$ transições?

9. Três bolas brancas e três pretas são distribuídas em duas caixas, de modo que cada uma contenha três bolas. O sistema encontra-se no estado i, $i = 0, 1, 2, 3$, se a primeira caixa contém exatamente i bolas brancas. A cada etapa, sorteamos uma bola de cada urna e trocamos uma com a outra. Se X_n denota o estado do sistema após a n-ésima etapa, explique por que o processo $\{X_n,\, n = 0, 1, 2, \dots\}$ é uma cadeia de Markov, e calcula a sua matriz de probabilidade de transição.

10. Numa sequência de lançamentos de uma moeda onde a chance de cara é 0,6, qual a probabilidade de ocorrência de exatamente três caras dentro dos dez primeiros lançamentos?

11. Usando dígrafos e quatro estados diferentes, dê exemplos de:

    (a) uma cadeia de Markov irredutível; e

(b) uma cadeia de Markov não-irredutível (i.e. possui uma ou mais classes de recorrência que não envolvam todos os estados).

12. Considerando probabilidades de saídas iguais para cada estado, obtenha as matrizes de transição de ambas as cadeias do exercício anterior.

13. Para quais valores x, y e z as matrizes

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 & x \\ y & 0,2 & 0,4 \\ 0,3 & z & 0,1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0,3 & x & x \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0,9 & z \end{bmatrix}$$

são markovianas?

14. Uma seguradora de automóveis classifica seus clientes em três categorias: não-desejáveis, satisfatórios e preferenciais. A classificação de um cliente pode mudar de um ano para o seguinte, sendo que não é possível passar de preferencial a não-desejável e vice-versa. 40% dos segurados não-desejáveis tornam-se satisfatórios; 30% dos satisfatórios tornam-se preferenciais, ao passo que 10% dos mesmos tornam-se não-desejáveis; e 20% dos preferenciais são rebaixados a satisfatórios.

    (a) Qual a matriz de transição do modelo?

    (b) Represente a topologia da cadeia.

    (c) Calcule a probabilidade de um cliente preferencial continuar a sê-lo no ano seguinte, e depois tornar-se satisfatório em seguida.

    (d) Calcule a probabilidade de um cliente não-desejável tornar-se preferencial após 2 anos.

    (e) A longo prazo, quais serão as proporções de clientes em cada uma das três classes?

15. Encontre o tempo médio (número médio de passos) para o processo alcançar o estado 3 dado que o processo se iniciou no estado 0 para uma cadeia de Markov cuja matriz de probabilidades de transição é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,9 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Numa estrada há carros e caminhões. Três de cada quatro caminhões na estrada são seguidos por um carro, enquanto que apenas um de cada cinco carros é seguido por um caminhão. Qual a porcentagem de caminhões na estrada?

17. Suponha que bolas são distribuídas sucessivamente entre oito caixas, de modo que cada bola tenha chances iguais de ser colocada em qualquer uma das mesmas. Qual a probabilidade de que haja exatamente três caixas ocupadas após a distribuição de nove bolas?

Sugestão: sempre que possível, experimente fazer simulações de Monte-Carlo para os exercícios propostos acima. Confira a resposta teórica e a simulada, e veja se ambas são correspondentes.